



Capítulo II – Análise estatística de incertezas aleatórias

- Média
- Desvio Padrão
- Desvio Padrão da Média

38

A Média



- Uma das melhores maneiras de termos confiança num dado resultado é repetirmos várias vezes a medida e examinarmos os diferentes valores obtidos, recorrendo a métodos estatísticos.
- Não podemos aplicar a análise estatística a incertezas experimentais de tipo sistemático. Apenas às incertezas aleatórias.

Chamaremos “**população**” ao conjunto de todos os valores possíveis que uma dada grandeza pode tomar. Chamaremos “**amostra**” a um determinado conjunto de medidas dessa grandeza.

Exemplo: Numa dada experiência, tendo reduzido a um nível desprezável os erros sistemáticos, medimos uma quantidade x várias vezes e obtemos a seguinte amostra de resultados (em unidades arbitrárias):

71, 72, 72, 73, 71

Que valor deveremos tomar como o melhor valor de x ?

A MÉDIA: $\bar{x} = \frac{71+72+72+73+71}{5} = 71.8$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (2.1)$$

39



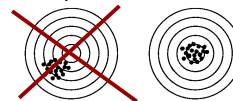
Desvio Padrão

- Como estimar agora **uma incerteza média** para os valores obtidos?
- Sendo \bar{x} o melhor valor de x , uma quantidade que dá informação sobre a dispersão dos dados obtidos é a diferença entre cada medida e \bar{x}

$$x_i - \bar{x} = d_i \quad (2.2)$$

d_i - **Desvio ou Resíduo** – informa sobre quanto a medida x_i se afasta da média.

- Se os desvios são pequenos as medidas são precisas.



(Se os erros sistemáticos foram minimizados)

Nº Tentativa	Valor da Medida - x_i	Resíduo: $d_i = x_i - \bar{x}$
1	71	-0.8
2	72	0.2
3	72	0.2
4	73	1.2
5	71	-0.8
$\sum x_i = 359$		$\bar{x} = 71.8$
$\sum d_i = 0.0$		

Vê-se que a média dos desvios, $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{N}$, não é uma quantidade útil para caracterizar a incerteza na média

40



- Vamos então usar o quadrado dos desvios e só depois determinar a sua média:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.3)$$

σ_x - **Desvio Padrão** da amostra x_1, \dots, x_N

Nº Tentativa	Valor da Medida - x_i	Resíduo: $d_i = x_i - \bar{x}$	d_i^2
1	71	-0.8	0.64
2	72	0.2	0.04
3	72	0.2	0.04
4	73	1.2	1.44
5	71	-0.8	0.64
$\sum x_i = 359$		$\bar{x} = 71.8$	$\sum d_i = 0.0$
$\sum d_i^2 = 2.80$			

A incerteza média nas 5 medidas é dada por $\sigma_x = 0.7$

- σ_x^2 - **Variância** da amostra x_1, \dots, x_N

41



- Há argumentos teóricos para substituímos $N \rightarrow N-1$ na fórmula do Desvio Padrão.

$$(2.4) \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad \sigma_x - \text{Desvio Padrão da amostra } x_1, \dots, x_N$$

- A divisão por $N-1$ corrige a tendência da equação 2.3 para subestimar a incerteza no caso do n° de medidas ser pequeno. Esta tendência pode ser entendida se tomarmos o valor mínimo $N = 1$. Quando só há uma medida, a média é igual ao próprio valor e a incerteza é nula, o que está, evidentemente, incorrecto. Todas as medidas experimentais vêm afectadas de incerteza!
- Com a equação 2.4, vem para σ_x o valor indeterminado $0/0$, reflectindo correctamente a nossa ignorância sobre a incerteza quando realizamos apenas uma medida.
- A diferença entre o resultado das equações 2.3 e 2.4 é pequena e tanto mais pequena quanto maior for o número de medidas N , é claro.

(Atenção às máquinas de calcular – qual a definição de desvio padrão que usam)

42

Desvio Padrão da Média



- O Desvio Padrão apresentado é uma incerteza média que caracteriza cada uma das **medidas individuais** realizadas.
- Contudo, temos razões para pensar que a média constitui um valor mais confiável do que qualquer uma das medidas tomadas separadamente.
- Mas qual é a incerteza associada ao valor médio?
- Provaremos, dentro de algumas aulas, que é dada por:

$$(2.5) \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} - \text{Desvio Padrão da Média}$$

No exemplo anterior das 5 medidas, $x_{\text{best}} \pm \delta x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} = 71.8 \pm 0.3$ unidades

43



Algumas considerações a propósito de $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$

- σ_x representa a incerteza média nas medidas individuais. Se fizermos mais medidas, este valor não vai variar apreciavelmente.
- Contudo, o desvio padrão na média vai diminuir lentamente, à medida que o número de medidas N aumenta. De facto, é o que esperamos. Se fazemos mais medidas de uma dada grandeza, esperamos naturalmente que o resultado final seja mais confiável e esse aumento de confiança no resultado é garantido pelo denominador \sqrt{N} .
- O factor \sqrt{N} cresce de modo demasiado lento à medida que N aumenta. Por exemplo, se quisermos aumentar a precisão das nossas medidas por um factor 10, teríamos que aumentar N por um factor 100!
- Além disso, lembremos que eventuais erros sistemáticos não diminuem com o aumento do número de medidas.

Portanto, na prática, se queremos aumentar apreciavelmente a precisão das nossas medidas, a melhor maneira pode ser melhorar a técnica e o sistema experimental.