Capítulo IX – Distribuição de Poisson

- Definição da Distribuição de Poisson
- Significado do parâmetro μ
- Propriedades da Distribuição de Poisson
- Aproximação Gaussiana da Distribuição de Poisson
- O problema do Ruído de Fundo (Background)

155

Definição da Distribuição de Poisson

- A distribuição de Poisson descreve resultados de experiências nos quais contamos **acontecimentos** que **ocorrem aleatoriamente mas a uma taxa média definida**. Por exemplo: as contagens de um decaimento radioactivo ou o nº de bebés que nasce por mês num determinado hospital.
- Consideremos uma amostra radioactiva e um detector adequado e em bom estado, com o qual pretendemos contar o nº de partículas emitidas, ν, num intervalo de tempo de 2 minutos. Estando o detector a funcionar bem, o valor de ν não terá incerteza associada.
- Se repetirmos a experiência, obteremos, quase seguramente, um nº diferente para ν.
- Essa **variação** obtida **em ν** não reflecte incerteza na contagem mas antes o **carácter intrinsecamente aleatório** do processo de decaimento radioactivo.
- Cada núcleo radioactivo de uma dada espécie química tem uma probabilidade definida de decair em qualquer intervalo de dois minutos. Se conhecêssemos essa probabilidade e o nº de núcleos radioactivos na nossa amostra, poderíamos calcular o nº médio esperado de decaimentos nos dois minutos. Contudo, cada núcleo decai num instante aleatório e, em qualquer intervalo de dois minutos, o nº de decaimentos pode ser diferente do nº médio esperado.

156

• Podemos fazer a pergunta: se repetirmos a nossa experiência muitas vezes, que tipo de distribuição devemos esperar para o nº de contagens, ν, observado nos dois minutos? Diremos que a distribuição esperada é uma distribuição binomial. Se existirem n núcleos e se for p a probabilidade de um qualquer núcleo decair, então a probabilidade de ν decaimentos é apenas a probabilidade de ν sucessos em n tentativas ou $B_{n,p}(\nu)$.

• Neste tipo de experiência podemos, contudo, fazer uma simplificação importante. O nº de tentativas, ou seja, de núcleos, é enorme (n pode ser da ordem de 10^{20}). Nestas circunstâncias, n grande e p pequeno, pode mostrar-se que a distribuição binomial é indistinguível de uma função mais simples designada por distribuição de Poisson:

Prob (ν contagens em qualquer intervalo definido) = $P_\mu(\nu)$

sendo $P_\mu(\nu)$ a distribuição de Poisson dada por:

$$\boxed{P_\mu(\nu) = e^{-\mu}\frac{\mu^\nu}{\nu!}} \qquad (9.1)$$

onde μ é um parâmetro positivo.

157

Significado do parâmetro μ

• Não vamos derivar a distribuição de Poisson. Vamos apenas mostrar que é a distribuição adequada para este tipo de experiências.

• Para estabelecermos o significado do parâmetro μ na eq. 9.1, temos que calcular o nº médio de contagens, $\bar{\nu}$, que seria esperado se nós repetíssemos a experiência muitas vezes. Esta média é determinada somando todos os valores possíveis de ν, cada um multiplicado pela sua probabilidade:

$$\bar{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu P_\mu(\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu e^{-\mu}\frac{\mu^\nu}{\nu!} \qquad (9.2)$$

O 1º termo da soma pode ser abandonado porque é nulo; $\frac{\nu}{\nu!}$ pode ser substituído por $1/(\nu-1)!$. Se passarmos para fora do somatório o factor comum $\mu e^{-\mu}$, obtemos:

$$\bar{\nu} = \mu e^{-\mu}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\mu^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \qquad (9.3)$$

158

ν

$$\bar{\nu} = \mu e^{-\mu} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

• A soma infinita corresponde a:

$$1+\mu+\frac{\mu^2}{2!}+\frac{\mu^3}{3!}+\ldots = e^{\mu} \qquad (9.4)$$

e, portanto, o factor $e^{-\mu}$ é cancelado por esta soma. Concluímos então que:

$$\boxed{\bar{\nu} = \mu} \qquad (9.5)$$

ou seja, o parâmetro μ que caracteriza a distribuição de Poisson $P_\mu(\nu)$ é exactamente o nº médio de contagens que esperamos obter se repetirmos a experiência muitas vezes.

• Por vezes, conhecemos à partida a taxa média R à qual devem ocorrer os acontecimentos que estamos a medir. Nesse caso, o nº médio de eventos esperado num tempo T é

μ = taxa x tempo = RT

• Inversamente, se a taxa é desconhecida, então, contando o nº de acontecimentos ocorridos num tempo T, podemos obter uma estimativa de μ e, portanto, da taxa R, através de $R_{best} = \mu_{best}/T$.

159

Propriedades da Distribuição de Poisson

• A distribuição de Poisson, $P_\mu(\nu)$ dá a probabilidade de obter o resultado ν numa experiência na qual contamos eventos que ocorrem aleatoriamente mas a uma taxa média definida.

• Vimos que o parâmetro μ é precisamente a contagem média esperada, $\bar{\nu}$.

• Qual é o desvio padrão desse nº ν de contagens quando repetimos a experiência muitas vezes?

• O desvio padrão de qualquer distribuição (depois de um nº elevado de tentativas) é a raiz do valor médio dos desvios relativamente à média, ou seja:

$$\sigma_\nu^2 = \overline{(\nu-\bar{\nu})^2} \qquad (9.6)$$

que se pode mostrar ser igual a

$$\sigma_\nu^2 = \overline{\nu^2} - (\bar{\nu})^2 \qquad (9.7)$$

160

- Para a distribuição de Poisson já vimos que $\overline{\nu} = \mu$ e um cálculo semelhante dá $\overline{\nu^2} = \mu^2 + \mu$. Então a equação anterior dá $\sigma_\nu^2 = \mu$. Logo:

$$\boxed{\sigma_\nu = \sqrt{\mu}} \qquad (9.8)$$

Ou seja, a distribuição de Poisson com contagem média μ tem desvio padrão $\sqrt{\mu}$.

- Se realizarmos uma experiência de contagens uma vez e obtivermos a resposta ν, podemos ver facilmente (usando o princípio da máxima probabilidade) que a melhor estimativa para a contagem média esperada é $\mu_{best} = \nu$.

- Da equação acima segue imediatamente que a melhor estimativa para o desvio padrão é $\sqrt{\nu}$. Por outras palavras, se fizermos uma medida do nº de acontecimentos num intervalo de tempo T e obtivermos a resposta ν,a nossa resposta para a contagem média esperada no tempo T é

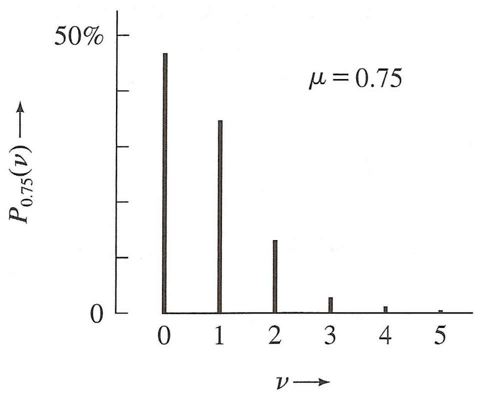
Nº médio de eventos num tempo T: $\boxed{\nu \pm \sqrt{\nu}}$ (9.9)

Regra da Raiz Quadrada

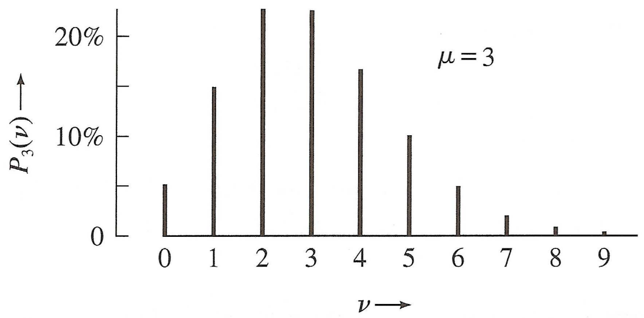
161

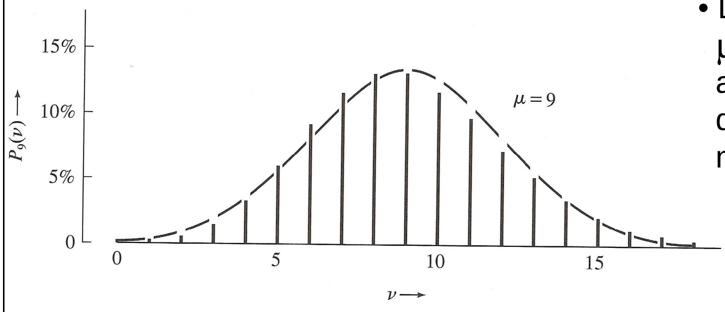
Aproximação Gaussiana da Distribuição de Poisson

- A distribuição de Gauss $G_{X,\sigma}(x)$ dá a probabilidade dos diferentes valores possíveis de uma variável *continua* x. Pelo contrário, a distribuição de Poisson $P_\mu(\nu)$, tal como a distribuição Binomial $B_{n,p}(\nu)$, dá as probabilidades de uma variável *discreta* ν = 0, 1, 2, 3,... .
- Outra diferença importante é que a distribuição de Gauss é especificada por 2 parâmetros, a média X e o desvio padrão σ, enquanto a distribuição de Poisson é especificada por um único parâmetro, a média μ, porque a largura da distribuição de Poisson é automaticamente determinada pela média, uma vez que $\sigma_\nu = \sqrt{\mu}$.
- Finalmente, a distribuição de Gauss tem sempre a forma de sino, sendo simétrica em torno do seu valor médio, enquanto a distribuição de Poisson não tem nenhuma destas características em geral, como se pode ver na figura.



162





A curva a tracejado corresponde à função de Gauss com X = 9 e σ = 3.

- As figuras seguintes mostram a distribuição de Poisson para μ = 3, sem dúvida mais aproximada da foma de sino, e μ = 9, já muito perto da curva em forma de sino e de ser simétrica em volta do valor médio μ = 9.

- De facto, pode provar-se que quando $\mu \to \infty$, a distribuição de Poisson se aproxima progressivamente da distribuição de Gauss, com a mesma média e desvio padrão. Ou seja,

$$P_\mu(\nu) \approx G_{X,\sigma}(\nu)$$

(quando μ é grande)

sendo

$$X = \mu \quad \text{e} \quad \sigma = \sqrt{\mu}$$

163

O problema do Ruído de Fundo (Background)

- Um problema que complica muitas medidas experimentais é o facto de existirem acontecimentos de fundo que não conseguimos distinguir dos acontecimentos que nos interessam e que são também detectados. Por exemplo, quando estudamos desintegrações de uma fonte radiactiva, não conseguimos impedir o detector de detectar partículas de outras fontes radiactivas na vizinhança ou até de raios cósmicos. Isto significa que os nºs que detectamos incluem a parte que nos interessa mais os eventos de fundo.

- A solução do problema é 1º) realizar a experiência; 2º) remover a fonte radioactiva e medir apenas a radiação de fundo; 3º) subtrair o fundo das contagens totais obtidas.

- Na prática o problema surge porque é geralmente útil realizar a medida total e a medida só do fundo durante tempos diferentes e, em geral, cometem-se erros, especialmente na análise de erros.

- Suponhamos que medimos um total de ν_{tot} acontecimentos (fonte mais fundo) num tempo T_{tot} e que depois medidos os acontecimentos do fundo, ν_{fd} durante um tempo T_{fd}.

164

• É claro que não podemos subtrair simplesmente as duas quantidades, uma vez que dizem respeito a tempos diferentes. Em vez disso, devemos calcular as taxas e subtraí-las:

$$R_{tot} = \frac{\nu_{tot}}{T_{tot}} \quad e \quad R_{fd} = \frac{\nu_{fd}}{T_{fd}}$$

$$R_{fonte} = R_{tot} - R_{fd}$$

• Para estimar as incertezas nas quantidades envolvidas, devemos lembrar que a regra da raiz quadrada dá as incertezas nos números medidos ν_{tot} e ν_{fd}. Devemos, portanto, calcular as incertezas nas taxas através da propagação de erros.

165