Capítulo VIII – Distribuição Binomial

- Probabilidades num jogo aos dados
- Definição de uma Distribuição Binomial
- Propriedades da Distribuição Binomial
- Aproximação Gaussiana de uma Distribuição Binomial

145

Probabilidades num jogo aos dados

- Jogamos 3 dados e registamos o nº de vezes que sai o número 1 na jogada. Os resultados possíveis são 0, 1, 2 ou 3. Se repetirmos a experiência um número imenso de vezes, encontraremos a distribuição limite, que nos dará a probabilidade de, numa qualquer jogada dos 3 dados, obtermos 0, 1, 2 ou 3 vezes o nº 1.

- Como a experiência é muito simples, podemos calcular facilmente a probabilidade de cada um dos 4 resultados possíveis. Havendo 6 números possíveis em cada dado, a probabilidade de sair o número 1 numa jogada de cada dado é 1/6. A probabilidade de sair o número 1 nos 3 dados é, então:

$$\frac{1}{6} \text{x} \frac{1}{6} \text{x} \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \approx 0.5\%$$

- A probabilidade de saírem só dois números 1 é um pouco mais complicada pois há diferentes modos disso acontecer: (1, 1, não-1), (não-1, 1, 1) ou (1, não-1, 1). Por exemplo, a probabilidade de sair a série (1,1,não-1) é:

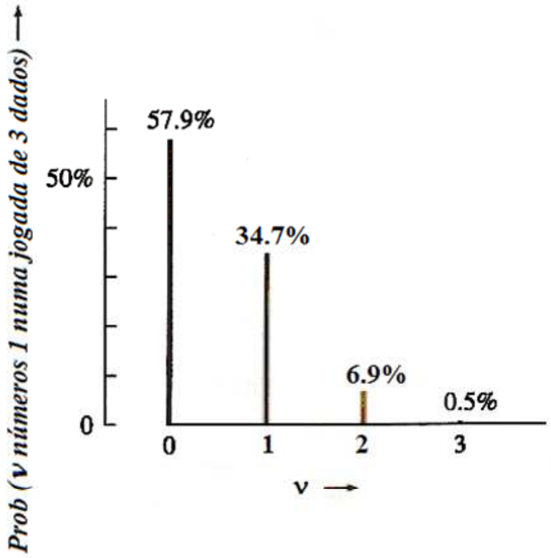
$$\text{Prob}\,(1,1,\text{não -}1) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)$$

146

$$Prob\,(sair\ 2\ vezes\ o\ número\ 1\ numa\ \ jogada\ de\ 3\ dados) = \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right) \approx 6.9\%$$

$$Prob\,(sair\ 1\ vezes\ o\ número\ 1\ numa\ \ jogada\ de\ 3\ dados) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 34.7\%$$

$$\text{Prob (não sair nenhum número 1 numa jogada de 3 dados)} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 57.9\%$$



Exemplo de uma
Distribuição Binomial

Definição de uma distribuição binomial

- Terminologia:
  - tentativas (em vez de jogadas)
  - sucesso ou tentativa bem sucedida (em vez de sair o nº 1)
  - p – probabilidade de sucesso numa tentativa
  - insucesso (não sair o nº 1)
  - q = 1 – p – probabilidade de insucesso

- A probabilidade de obtermos ν sucessos em n tentativas é dada pela ***distribuição binomial***

$$\text{Prob } (\nu \text{ sucessos em n tentativas}) = B_{n,p}(\nu) =$$
$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-\nu-1)}{1\times 2\times \ldots \times \nu}\, p^{\nu} q^{n-\nu}$$

- O nome distribuição binomial vem da conhecida expansão binomial e do respectivo coeficiente binomial

$$\binom{n}{\nu} = \frac{n(n-1)\ldots(n-\nu-1)}{1\times 2\times \ldots \times \nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$$

Onde se introduziu a notação factorial: n! = 1 x 2 x 3 x ... x n.

Por convenção, 0! = 1, de onde $\binom{n}{0} = 1$.

• O coeficiente binomial aparece na expansão binomial:

$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q + \ldots + q^n$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu}$$

que é válida para dois quaisquer números p e q e qualquer inteiro n.

• Na forma compacta a distribuição binomial vem, então:

$$\text{Prob}\,(\nu \text{ sucessos em n tentativas}) = B_{n,p}(\nu) = \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu}$$

onde p representa a probabilidade de um sucesso e q = 1 - p

• O coeficiente $\binom{n}{\nu}$ dá o nº de combinações diferentes possíveis em que se podem obter ν sucessos em n tentativas.

149

Propriedades da distribuição Binomial

• A distribuição binomial $B_{n,p}(\nu)$ dá a probabilidade de se ter ν sucessos em n tentativas, quando p é a probabilidade de sucesso numa única tentativa.

• Se repetirmos toda a experiência de n tentativas muitas vezes, é então natural perguntar qual seria o número médio de sucessos, $\bar{\nu}$.

• Para encontrar este valor médio somamos todos os valores possíveis de ν, cada um multiplicado pela sua probabilidade. Ou seja:

$$\bar{\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} \nu B_{n,p}(\nu)$$

que pode ser avaliado como

$$\boxed{\bar{\nu} = np}$$

o que constitui o resultado esperado: se repetirmos a nossa série de n tentativas muitas vezes, o nº médio de sucessos será a probabilidade de sucesso numa tentativa n vezes.

• Também podemos calcular o desvio padrão σ_ν associado ao nosso nº de sucessos. O resultado é:

$$\boxed{\sigma_\nu = \sqrt{np(1-p)}}$$

150

• Quando p = ½ (como numa experiência de “moeda ao ar”), o nº médio de sucessos á exactamente n/2. Além disso, é fácil provar que para p = ½:

$$B_{n,1/2}(\nu) = B_{n,1/2}(n-\nu)$$

ou seja, a distribuição binomial com p = ½ é simétrica em torno do valor médio n/2.

• Em geral, quando $p \neq 1/2$, a distribuição binomial $B_{n,p}(\nu)$ não é simétrica.

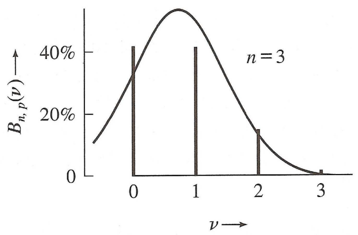
• É interessante comparar a distribuição binomial $B_{n,p}(\nu)$ com a distribuição Gaussiana $G_{X,\sigma}(x)$. Talvez a maior diferença seja o facto de a experiência descrita pela função binomial ter resultados discretos ν = 0, 1, 2, …, n, enquanto os resultados da distribuição Gaussiana são valores contínuos de uma quantidade medida x.

• Além disso, a distribuição Gaussiana é simétrica em torno de um pico centrado no valor médio x = X, o que significa que o valor médio X é também o valor mais provável (para o qual $G_{X,\sigma}(x)$ é máximo). A distribuição binomial, como vimos, só é simétrica quando p = ½ e, em geral, o valor médio não coincide com o valor mais provável.

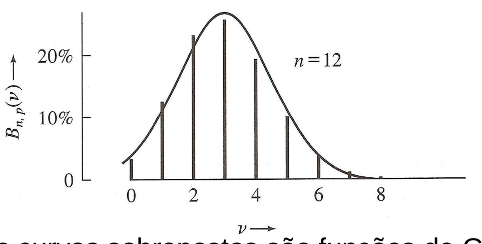
151

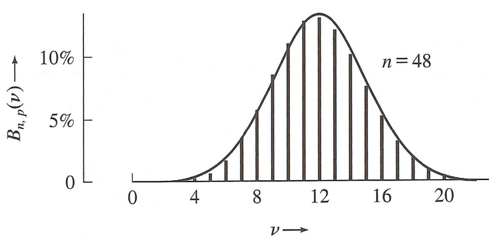
Aproximação Gaussiana de uma distribuição Binomial

• Apesar das diferenças, as distribuições de Gauss e binomial têm uma importante ligação. Se considerarmos a distribuição binomial $B_{n,p}(\nu)$ para qualquer valor fixo de p, então, quando n é grande $B_{n,p}(\nu)$ é aproximadamente igual a uma distribuição de Gauss $G_{X,\sigma}(x)$, com a mesma média e o mesmo desvio padrão. Ou seja,



$$\boxed{\begin{array}{ll} B_{n,p}(\nu) \approx G_{X,\sigma}(\nu) & \text{(para n grande)} \\ \text{com} \quad X = np \quad \text{e} & \sigma = \sqrt{np(1-p)}. \end{array}}$$





As curvas sobrepostas são funções de Gauss com a mesma média e desvio padrão

152

- A aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal quando n é grande é muito útil na prática. O cálculo da função binomial quando n é igual ou maior a 20 é aborrecido e leva tempo, enquanto o cálculo da distribuição normal é sempre simples, quaisquer que sejam X e σ.

- Exemplo: Qual a probabilidade de obtermos 23 caras em 36 lançamentos de uma moeda, atendendo a que a probabilidade de uma cara numa tentativa é ½ ?

$$\text{Prob (23 caras em 36 moedas ao ar)} = B_{36,\,1/2}(23)$$

$$= \frac{36!}{23!13!}\left(\frac{1}{2}\right)^{36} = 3.36\%$$

Por outro lado, como a média da distribuição é np = 18 e o desvio padrão é $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3$ podemos aproximar a distribuição binomial pela função $G_{18,3}(23)$ e um cálculo simples dá:

$$\text{Prob (23 caras em 36 moedas ao ar)} \approx G_{18,3}(23) = 3.32\%.$$

153

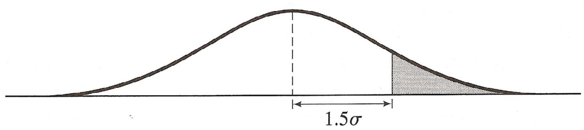
- A utilidade da aproximação Gaussiana é ainda mais óbvia se quisermos a probabilidade de vários resultados.

- Exemplo: Qual a probabilidade de obter 23 *ou mais* caras em 36 lançamentos de uma moeda?

$$\text{Prob (23 caras ou mais em 36 lançamentos)} =$$
$$= \text{Prob (23 caras)} + \text{Prob (24 caras)} + \ldots + \text{Prob (36 caras)}$$

Como o cálculo das probabilidades Gaussianas trata ν como uma variável contínua, a probabilidade de ν = 23, 24, … é melhor calculada como $\text{Prob}_{\text{Gauss}}(\nu \geq 22.5)$.

ν = 22.5 é 1.5 desvios padrão acima do valor médio, 18. (Lembremos que σ = 3, logo 4.5 = 1.5σ.) A probabilidade de obtermos um resultado maior do que 1.5σ acima da média, iguala a área sob a função Gaussiana mostrada na figura. É facilmente calculada com a ajuda da tabela do Integral de Erro Normal.



154