Capítulo V – Médias Pesadas

- Combinação de medidas independentes

- A média pesada

Combinação de medidas independentes

- Acontece com frequência que uma certa grandeza seja medida de forma diferente ou até em laboratórios diferentes. Põe-se, então, a questão de saber como combinar os resultados das diversas medidas de modo a obter uma única melhor estimativa.

- Suponhamos que são obtidos dois resultados, ambos fruto de (muitas) medições cuidadosamente efectuadas. Constituem, portanto, os melhores valores em cada caso:

$$\begin{aligned} x &= x_A \pm \sigma_A \\ x &= x_B \pm \sigma_B \end{aligned} \qquad (5.1)$$

- Como combinar os dois valores, x_A e x_B, de modo a obtermos um único melhor valor para a grandeza?

- Note-se que, se a discrepância $|x_A - x_B|$ entre os dois resultados fosse muito maior do que ambas as incertezas σ_A e σ_B, deveríamos suspeitar de que alguma coisa teria corrido mal, pelo menos com uma das medidas. Diríamos que os resultados eram inconsistentes e teríamos que examinar cuidadosamente as condições em que haviam sido realizadas, procurando, nomeadamente, erros sistemáticos.

A Média Pesada

• Admitindo que os dois resultados são consistentes, qual é a melhor estimativa x_{best} para o verdadeiro valor X?

• Assumimos que ambas as medidas seguem uma distribuição normal em volta do verdadeiro valor X. Assim, a probabilidade de se obterem os valores específicos x_A, x_B, em cada uma das respectivas medidas é:

$$\mathrm{Prob}_X(x_A) \propto \frac{1}{\sigma_A} e^{-(x_A - X)^2/2\sigma_A^2} \qquad \mathrm{Prob}_X(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_B} e^{-(x_B - X)^2/2\sigma_B^2}$$

Verdadeiro valor X desconhecido

• A probabilidade de encontrarmos os valores x_A e x_B é o produto das probabilidades:

$$\mathrm{Prob}_X(x_A, x_B) \propto \frac{1}{\sigma_A \sigma_B} e^{-\chi^2/2} \qquad (5.2)$$

$$\text{onde} \quad \chi^2 = \left(\frac{x_A - X}{\sigma_A}\right)^2 + \left(\frac{x_B - X}{\sigma_B}\right)^2 \qquad (5.3)$$

108

A Média Pesada (cont.)

$$\chi^2 = \left(\frac{x_A - X}{\sigma_A}\right)^2 + \left(\frac{x_B - X}{\sigma_B}\right)^2 \qquad (5.3)$$

• Esta quantidade é a soma dos quadrados dos desvios dos dois resultados relativamente ao verdadeiro valor X, cada um deles dividido pela correspondente incerteza ao quadrado.

• O princípio da máxima probabilidade assegura que a melhor estimativa para X é o valor para o qual a probabilidade da eq. 5.2 é máxima ou, de modo equivalente, para o qual o expoente χ^2 é mínimo. (Como maximizar a probabilidade impõe minimizar "a soma dos quadrados", χ^2, este método para estimar X é por vezes designado por "método dos mínimos quadrados".)

• Diferenciando a eq. 5.3 e igualando a zero:

$$2\frac{x_A - X}{\sigma_A^2} + 2\frac{x_B - X}{\sigma_B^2} = 0 \qquad (5.4)$$

109

A Média Pesada (cont.)

Reescrevendo vem: melhor estimativa para X = $\left(\frac{x_A}{\sigma_A^2}+\frac{x_B}{\sigma_B^2}\right)\Big/\left(\frac{1}{\sigma_A^2}+\frac{1}{\sigma_B^2}\right)$ (5.5)

- Se definirmos "pesos": $w_A = \frac{1}{\sigma_A^2}$ e $w_B = \frac{1}{\sigma_B^2}$ (5.6)

- podemos dizer que a melhor estimativa para X é a média pesada:

$$\bar{x}_p = \frac{w_A x_A + w_B x_B}{w_A + w_B} \qquad (5.7)$$

- Generalizando: $x_1 \pm \sigma_1, x_2 \pm \sigma_2, ..., x_N \pm \sigma_N$

$$\boxed{\bar{x}_p = \frac{\sum_i w_i x_i}{\sum_i w_i}} \quad (5.8) \qquad \boxed{w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (5.9)$$

110

A Média Pesada (cont.)

$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$ - Uma vez que o peso associado a cada medida envolve o quadrado da correspondente incerteza, qualquer medida muito menos precisa que as outras contribui muito menos para o resultado final.

- Como a média pesada é uma função das medidas x_1, x_2, …, x_N, a incerteza na média pesada pode ser calculada usando a propagação de erros. Como se pode facilmente confirmar, o resultado dá:

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}_p} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i w_i}}} \qquad (5.10)$$

- Atendendo a que 5.9 se pode escrever como $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{w_i}}$, podemos dizer que a incerteza em cada medida é o inverso da raiz quadrada do seu peso.

- Então, também podemos dizer que a incerteza em $\bar{x}_p$ é o inverso da raiz quadrada da soma dos pesos individuais.

111