Capítulo IV – A Distribuição Normal

- Histogramas e distribuições
- Distribuição Limite
- Distribuição Normal
- Desvio Padrão – Intervalo de confiança
- Justificação da Média como a melhor estimativa
- Justificação da adição dos quadrados das incertezas
- Justificação da fórmula geral de propagação de erros
- Desvio Padrão da Média
- Grau de confiança num valor medido

53

Histogramas e Distribuições

- Uma análise estatística séria requer que haja um nº apreciável de dados. Quando o nº de dados é significativo, passa a ser importante a forma como os trabalhamos e apresentamos.

Exemplo: Numa dada experiência, tendo reduzido a um nível desprezável os erros sistemáticos, medimos um comprimento x (em cm) várias vezes e obtivemos os resultados, x_k, que se apresentam organizados de acordo com o nº de vezes que acontecem:

Diferentes valores discretos, x_k	23	24	25	26	27	28
Nº de vezes que cada valor é medido, n_k	1	3	2	3	0	1

- A Média dos resultados obtidos pode ser obtida através da **Média Pesada**:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{N} = \frac{\sum_k x_k n_k}{N}} \qquad (4.1)$$

54

Diferentes valores, x_k	23	24	25	26	27	28
Nº de vezes medido, n_k	1	3	2	3	0	1

$$\bar{x} = \frac{23 + (24\times 3) + (25\times 2) + \ldots + 28}{10}$$

$$\boxed{\sum_k n_k = N}$$

• O nº de vezes, n_k, que um dado resultado x_k foi obtido, pode ser apresentado como uma fracção do nº total de medidas:

(4.2) $$\boxed{F_k = \frac{n_k}{N}}$$ - **Frequência** de x_k

• As frequências F_k especificam a *distribuição* de resultados, pois descrevem a forma como as medidas estão *distribuídas* pelos diferentes valores possíveis.

$$\boxed{\bar{x} = \sum_k x_k F_k}$$

A Média é a soma pesada de todos os diferentes valores x_k obtidos, sendo cada x_k pesado pela sua frequência, F_k.

(4.3)

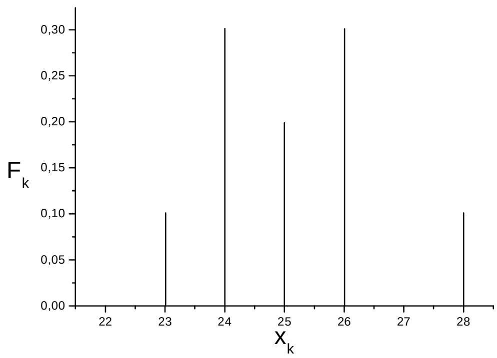
55

• O resultado $\sum_k n_k = N$ e a definição $F_k = \frac{n_k}{N}$ implicam que

$$\boxed{\sum_k F_k = 1} \qquad (4.4)$$

Qualquer série de números cuja soma dê 1 é dita ***normalizada***. A condição acima é, portanto, uma ***condição de normalização***.

• A distribuição das medidas de comprimento obtidas pode ser apresentada graficamente num ***histograma*** como o da figura seguinte:



• Este histograma, **gráfico de distribuição de frequências**, é apropriado quando os valores x_k são inteiros ordenados.
As frequências são representadas pela altura das linhas em cada ponto da abcissa x_k.

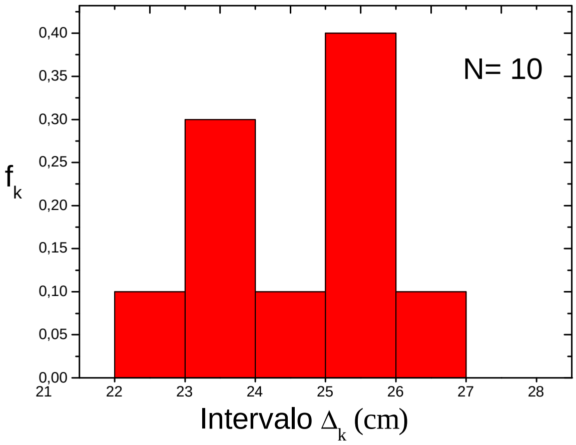
• Este gráfico é idêntico ao gráfico da distribuição de resultados a menos de um factor de escala (a ordenada seria n_k).

56

• Contudo, muitas medidas de grandezas físicas apresentam um intervalo contínuo de valores. Suponhamos que, no mesmo exemplo das medidas de um comprimento, obtemos a sequência de 10 valores (**N = 10**):

26.4, 23.9, 25.1, 24.6, 22.7, 23.8, 25.1, 23.9, 25.3, 25.4

Intervalo de valores (cm)	22 a 23	23 a 24	24 a 25	25 a 26	26 a 27	27 a 28
Nº de observações no intervalo	1	3	1	4	1	0



• A área de rectângulo $f_k\Delta_k$ correspondente a cada intervalo Δ_k dá a frequência de medidas que cai nesse intervalo. Assim, uma área de 0.3 indica que 3/10 das medidas cai nesse intervalo.

$$\boxed{f_k\Delta_k = \text{frequência do intervalo } \Delta_k \qquad (4.5)}$$

57

Notas sobre histogramas:

• Se os intervalos são demasiado largos, todas ou quase todas as medidas caem num intervalo e o histograma acaba por ser um rectângulo sem interesse..

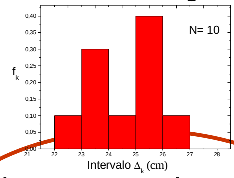
• Se os intervalos são demasiado pequenos, então vários deles conterão apenas um resultado e o histograma resultante será constituído por um conjunto numeroso de rectângulos estreitos quase todos com a mesma altura.

• A largura do intervalo deve ser escolhida de forma a que várias leituras caiam dentro do intervalo.

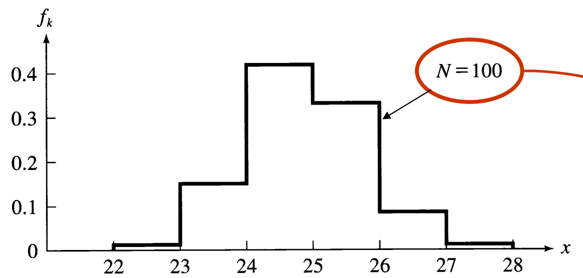
58

Distribuições Limite

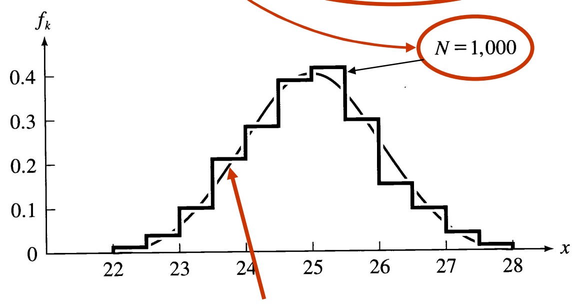
• Em muitas experiências, à medida que o nº de medidas aumenta, o histograma começa a tomar uma forma definida e simples.



N = 10



Histogramas da mesma quantidade x, depois de 100 medidas e depois de 1000 medidas.



Para **N > 1000**, é possível continuar a diminuir a largura dos intervalos e o histograma começa a tornar-se regular, simétrico e quase contínuo.

Isto traduz uma importante propriedade: à medida que o nº de medidas se aproxima de infinito, a distribuição aproxima-se de uma **curva contínua bem definida**.

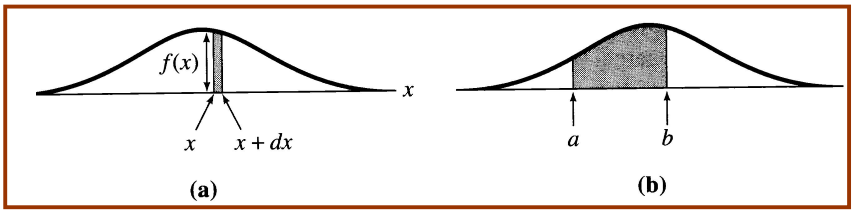
59

• Esta forma limite é conhecida por **Distribuição Limite**.

• Trata-se de uma construção teórica, que nunca pode ser verdadeiramente determinada experimentalmente. Só um nº infinito de medidas e intervalos de medida infinitesimais poderiam gerar a distribuição limite.

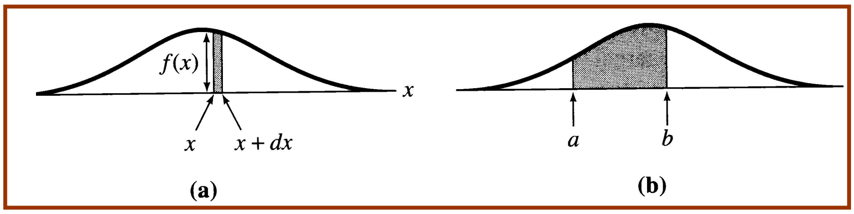
• Contudo, temos boas razões para crer que cada medida tem uma distribuição limite da qual o histograma se aproxima tanto mais quanto mais medidas forem realizadas.

• A distribuição limite define uma função, f(x), cujo significado é ilustrado nas figuras seguintes:



• À medida que continuássemos a fazer mais e mais medidas da quantidade x, o histograma tornar-se-ía indistinguível da curva f(x). Assim, a frequência de medidas que cai em qualquer pequeno intervalo entre x e x+dx é igual à área f(x)dx da figura (a).

60



(4.6) $f(x)dx =$ Fracção de medidas (frequência) que cai no intervalo [x,x+dx]

- A fracção de medidas que cai entre dois valores *a* e *b*, é a área do gráfico debaixo da função, compreendida entre x = *a* e x = *b* (área sombreada da figura (b).

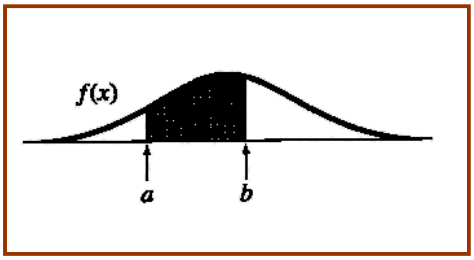
- Esta área corresponde ao integral definido de f(x):

(4.7) $\int_a^b f(x)dx =$ Frequência (*esperada)* de medidas que cai entre x = *a* e x = *b.*

(depois de realizarmos um nº infinito de medidas!)

= **PROBABILIDADE**

61



$f(x)dx =$ Probabilidade de uma qualquer medida dar um valor que pertença ao intervalo x e x+dx.

$\int_a^b f(x)dx =$ Probabilidade de uma qualquer medida cair no intervalo entre x = *a* e x = *b*.

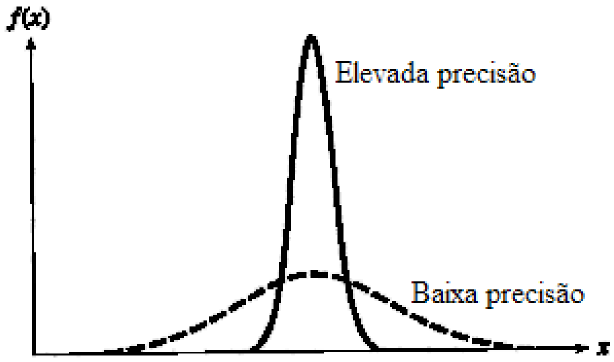
- Podemos então concluir o seguinte: se fosse conhecida a distribuição limite f(x) da medida de uma certa quantidade x (com um determinado sistema experimental), então também seria conhecida a probabilidade de se obter um resultado no intervalo $a \leq x \leq b$.

- Como a probabilidade total de se obter um valor qualquer entre -∞ e +∞ deve ser 1, a distribuição limite f(x) tem que satisfazer a condição:

(4.8) $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1}$$ f(x) diz-se ***normalizada***.

62

- Em $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ os limites ±∞ são usados por desconhecermos o intervalo real em que se situarão os valores medidos numa dada experiência (e não porque se obterão valores entre ±∞).



- Se as medidas experimentais forem realizadas com grande precisão, todos os valores obtidos estarão perto do melhor valor de x. Assim, o histograma de resultados e, portanto, também a distribuição limite, constituirão a curva estreita representada na figura.

- Se a precisão for baixa, os valores encontrados serão muito dispersos e a respectiva distribuição limite será larga e achatada.

63

- A distribuição limite f(x) das medidas de uma certa quantidade x descreve como é que os resultados estariam distribuídos depois de um nº infinito de medidas.
- Se f(x) for conhecida, poderíamos então determinar o valor médio $\overline{x}$ que encontraríamos ao fim de muitas medidas.
- Vimos que a média de qualquer nº de medidas de uma mesma quantidade é dada por:

$$\overline{x} = \sum_k x_k F_k$$

- Na distribuição limite f(x) temos um nº enorme de medidas. Podemos dividir todo o intervalo de valores em pequenos intervalos de x_k a x_k+dx_k. A frequência de valores em cada intervalo é

$$F_k = f(x_k)dx_k$$

- No limite, quando todos os intervalos tenderem para zero, obtemos:

$$\boxed{\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx} \qquad (4.9)$$

Valor *esperado* para $\overline{x}$ depois de um infinito de medidas.

- Quanto ao desvio padrão (variância):

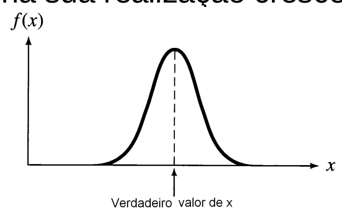
$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 \longrightarrow \boxed{\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\overline{x})^2 f(x)dx} \qquad (4.10)$$

(A diferença entre o factor N e N-1 perde significado.)

64

Distribuição Normal

- Diferentes tipos de medidas têm formas diferentes de distribuições limite. Ou seja, nem todas as distribuições limite têm a forma de sino simétrico que vimos anteriormente. (Por ex., as distribuições binomial e de Poisson são geralmente assimétricas.)
- Contudo, muitas medidas têm como distribuição limite a curva f(x) simétrica em forma de sino apresentada.
- De facto, é possível provar que, se uma medida está sujeita a muitas pequenas fontes de erro aleatório e a desprezável erro sistemático, os valores medidos serão distribuídos de acordo com a curva em forma de sino e ela estará centrada no verdadeiro valor de x. (A existência de erros sistemáticos traduzir-se-ía no facto de a distribuição limite vir centrada noutro valor que não o valor verdadeiro.)
- Vamos admitir que o verdadeiro valor de uma grandeza existe (idealização), definindo-o como aquela quantidade da qual nos aproximamos cada vez mais, à medida que o número de medidas e o cuidado na sua realização crescem.
- Vamos designar os verdadeiros valores das grandezas x, y, z, etc. por X, Y, Z, etc.

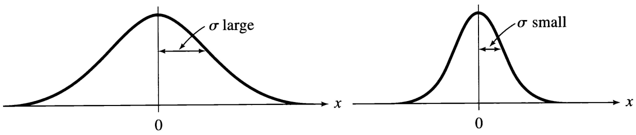


65

Distribuição Normal

- A função matemática que descreve a função simétrica em forma de sino é designada por Distribuição Normal ou Função Gaussiana e tem como componente fundamental:

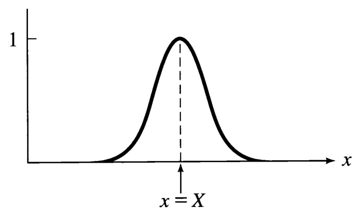
$$e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (4.11)$$



onde σ é um parâmetro fixo que será designado simplesmente por largura. É importante familiarizarmo-nos com as propriedades desta função.

- Quando x = 0 a eq. 4.11 é igual a 1.
- É simétrica em torno de x = 0, pois dá os mesmos resultados para x e –x.
- À medida que x se afasta de zero, a eq. 4.11 decresce tendendo para zero.
- A forma em sino mais alargada e achatada ou mais estreita e alta está relacionada com o valor do parâmetro largura, maior ou menor, respectivamente.
- Para se obter uma Gaussiana centrada num valor x = X diferente de zero, basta substituir x na equação 4.11 por (x-X).

$$e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.12)$$



66

Distribuição Normal

- Para obtermos a forma final da Função Gaussiana temos que a normalizar. A função f(x) deve satisfazer:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

- Vamos partir da função $f(x) = Ae^{-(x-X)^2/2\sigma^2}$, onde o factor A não muda a forma nem altera a posição do máximo em x = X. Devemos então escolher o factor de normalização A de modo a que f(x) cumpra a condição acima.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-(x-X)^2/2\sigma^2}dx$$

- Simplifiquemos através das seguintes mudanças de variáveis:
  1º) x – X = y (logo, dx = dy)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-y^2/2\sigma^2}dy$$

  2º) y/σ=z (logo dy = σdz)

$$= A\sigma\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2}dz$$

67

Distribuição Normal

- Prova-se que o integral tem a seguinte solução:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2}dz = \sqrt{2\pi} \qquad (4.13)$$

- Verifica-se assim que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 = A\sigma\sqrt{2\pi} \Rightarrow A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

- A fórmula final da Distribuição de Normal ou de Gauss é então:

$$\boxed{G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}} \qquad (4.14)$$

Centro da distribuição – é o ponto relativamente ao qual a distribuição é simétrica

Largura da distribuição

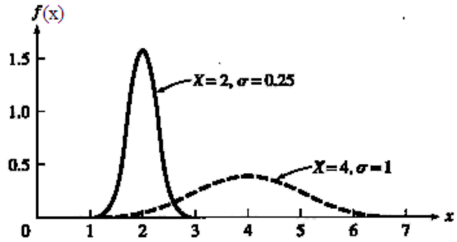
68

Distribuição Normal

$$G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}$$

Descreve a distribuição limite dos resultados das medidas da quantidade x, cujo verdadeiro valor é X, se a medida for apenas sujeita a erros aleatórios.

Repare-se no efeito do parâmetro σ, do denominador do expoente: um σ mais pequeno assegura automaticamente uma distribuição mais estreita com um valor mais alto no centro, uma vez que a área total deve ser sempre igual a 1.



Distribuição Normal – Valor Médio e Desvio Padrão

- Vimos que o conhecimento da distribuição limite de uma medida nos permitia determinar o valor médio $\overline{x}$ esperado depois de inúmeras medidas (Eq. 4.9).
- Tendo agora em conta a distribuição Gaussiana, f(x) = $G_{X,\sigma}$(x), a eq. 4.9 vem:

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x G_{X,\sigma}(x) dx$$

69

Distribuição Normal
Valor Médio e Desvio Padrão

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x G_{X,\sigma}(x) dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-(x-X)^2/2\sigma^2} dx$$

- Fazendo a mudança de variáveis y = x – X (donde dx = dy e x = y + X), podemos dividir o integral em dois termos:

$$\overline{x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-y^2/2\sigma^2} dy}_{} + X \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2\sigma^2} dy}_{} \right)$$

É zero porque a contribuição de qualquer ponto y é exactamente cancelada pela do ponto -y

É o integral de normalização da eq. 4.13 e tem valor $\sigma\sqrt{2\pi}$

O resultado final é, como esperado, $\boxed{\overline{x} = X}$, depois de um nº infinito de medidas.

70

Distribuição Normal
Valor Médio e Desvio Padrão

- Ou seja, se as medidas estão distribuídas de acordo com uma função Gaussiana, então, depois de um nº inifinito de medias, o valor médio é o verdadeiro valor no qual a função Gaussiana está centrada.

- A utilidade prática deste resultado é que se fizermos um nº grande de medidas (embora não infinito), o valor médio obtido estará perto de X.

- Por outro lado, para o desvio padrão e de acordo com a eq. 4.10, vem:

$$\boxed{\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{x})^2 G_{X,\sigma}(x)dx}$$

- Substituindo o valor médio por X e fazendo a mudança de variáveis y = x – X e y/σ=z e integrando por partes, como anteriormente, obtém-se:

$$\boxed{\sigma_x^2 = \sigma^2}$$ (depois de um nº infinito de medidas)

- Ou seja, o parâmetro σ da distribuição Gaussiana é exactamente o desvio padrão que obteríamos depois de um nº infinito de medidas. σ é, por isso, também designado por Desvio Padrão da distribuição Gaussiana.

71

Desvio Padrão – Intervalo de confiança

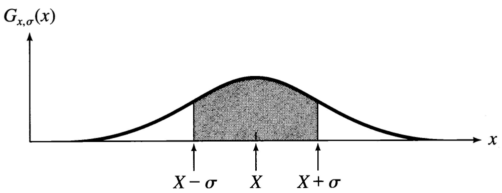
- A distribuição limite f(x) para medidas de uma quantidade x, dá-nos a probabilidade de obtermos qualquer resultado dos possíveis para x.

- Especificamente o integral $\int_a^b f(x)dx$

  é a probabilidade de uma qualquer medida dar um resultado no intervalo $a \le x \le b$.

- Se a distribuição limite for uma distribuição de Gauss, esse integral pode ser determinado. Em particular, podemos calcular a probabilidade de uma medida fornecer um resultado que caia dentro do intervalo correspondente a um desvio padrão σ, do verdadeiro valor X. Essa probabilidade é

$$\text{Prob (no intervalo }\sigma) = \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} G_{X,\sigma}(x)dx$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2} dx$$



72

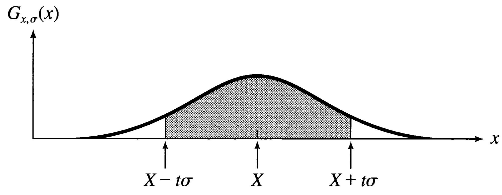
Desvio Padrão – Intervalo de confiança

- O integral pode ser simplificado através da substituição (x-X)/σ = z, com a qual dx = σdz e os limites de integração passam a z = ±1. Vem então:

$$\text{Prob (no intervalo } \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-z^2/2} dz$$

- A probabilidade de encontrarmos uma resposta dentro do intervalo 2σ, 1.5σ ou qualquer outro valor tσ, para qualquer valor t positivo em torno de X, é também possível. Essa probabilidade é dada pela área da figura e por

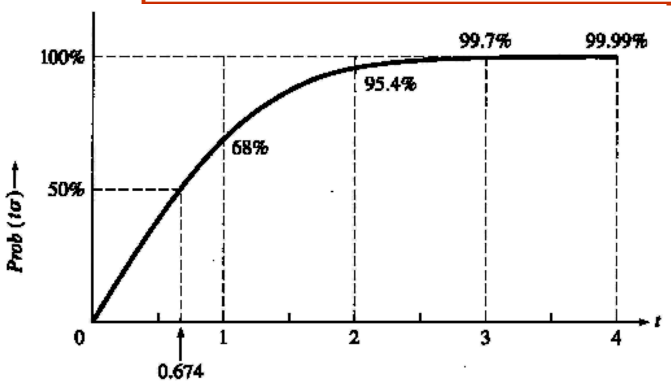
$$\text{Prob (no intervalo } t\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-z^2/2} dz$$



- Este integral não pode ser avaliado analiticamente mas é facilmente calculado num computador. É muitas vezes designado por função erro ou integral normal do erro, erf(t).

73

Desvio Padrão – Intervalo de confiança



t	0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
Prob (%)	0	20	38	55	68	79	87	92	95.4	98.8	99.7	99.95	99.99

A figura e a tabela representam o integral em função de t, mostrando alguns valores:

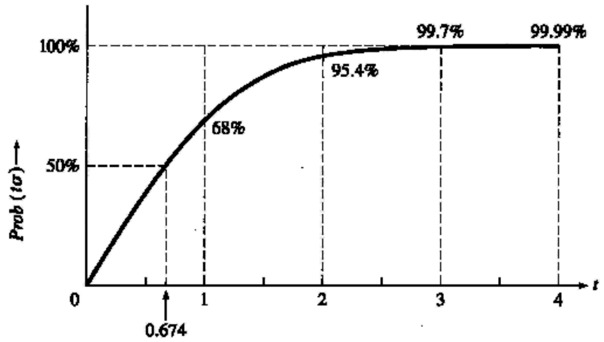
- A probabilidade de uma medida cair dentro de um intervalo de σ em volta do verdadeiro valor é 68%. Assim, se tomarmos um desvio padrão como a incerteza na nossa medida estaremos 68% seguros da nossa resposta.

74

Desvio Padrão – Intervalo de confiança

- A probabilidade cresce rapidamente para 100%. A probabilidade de que uma medida caia em 2σ é de 95.4%, em 3σ é de 99.7%.

- Visto de outra maneira: a probabilidade de que o resultado de uma medida caia fora de σ é apreciável (32%), mas é muito menor se se tratar de 2σ (4.6%), etc.



- Por vezes, em vez de σ, usa-se um outro parâmetro de avaliação: o **erro provável (PE)**.
- O erro provável define-se como a distância para a qual há 50% de probabilidade de uma medida cair no intervalo [X-PE, X+PE].
- A figura mostra que, para distribuições normais, o erro provável é 0.67σ.

75

Justificação da Média como a Melhor Estimativa

- Se f(x) fosse conhecida → poderíamos calcular a média $\overline{x}$ e o desvio padrão σ obtidos após um nº infinito de medidas e, pelo menos para a distribuição normal, poderíamos também conhecer o verdadeiro valor X.

- Infelizmente, nunca conhecemos a distribuição limite, pois na prática, temos sempre um nº finito de valores medidos

$$x_1, x_2, \ldots, x_N$$

- O nosso problema é chegarmos à melhor estimativa para X e para σ, baseando-nos nos N valores medidos.

- Se as medidas seguissem uma distribuição normal $G_{X,\sigma}(t)$ e se conhecêssemos os parâmetros X e σ, poderíamos calcular as probabilidades de obter os valores $x_1, x_2, \ldots, x_N$ que foram de facto obtidos. Assim, a probabilidade de obter um valor perto de x_1 num pequeno intervalo dx_1 é:

$$\text{Prob (entre } x_1 \text{ e } x_1 + dx_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_1 - X)^2/2\sigma^2} dx_1$$

76

Justificação da Média como a Melhor Estimativa

• Na prática não estamos interessados no tamanho do intervalo dx_1, nem o factor $\sqrt{2\pi}$ tem importância. Assim, abreviamos a equação anterior para:

$$\text{Prob}\,(x_1) \propto \frac{1}{\sigma} e^{-(x_1-X)^2/2\sigma^2} \qquad (4.15)$$

e consideraremos, abusivamente, a eq. 4.15 como a probabilidade de obter o valor x_1.

• A probabilidade de obter x_2 numa segunda medida será então:

$$\text{Prob}\,(x_2) \propto \frac{1}{\sigma} e^{-(x_2-X)^2/2\sigma^2} \qquad (4.16)$$

• E assim sucessivamente até à probabilidade de obter x_N:

$$\text{Prob}\,(x_N) \propto \frac{1}{\sigma} e^{-(x_N-X)^2/2\sigma^2} \qquad (4.17)$$

77

Justificação da Média como a Melhor Estimativa

• As equações 4.15 a 4.17 dão as probabilidades de obter cada um dos valores $x_1, x_2, \ldots, x_N$, calculados em termos da distribuição $G_{X,\sigma}(x)$.

• A probabilidade de observarmos toda a série de N leituras é o produto das probabilidades separadas

$$\text{Prob}_{X,\sigma}(x_1, x_2, \ldots x_N) = \text{Prob}(x_1) \times \text{Prob}(x_2) \times \ldots \times \text{Prob}(x_N)$$

ou

$$\boxed{\text{Prob}_{X,\sigma}(x_1, x_2, \ldots, x_N) \propto \frac{1}{\sigma^N} e^{-\sum (x_i-X)^2/2\sigma^2}} \qquad (4.18)$$

• Os números $x_1, x_2, \ldots, x_N$ são os resultados das várias medidas; são, portanto, conhecidos, são fixos.

• A quantidade $\text{Prob}_{X,\sigma}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ é a probabilidade de obter os N resultados calculada em termos de X e σ, o verdadeiro valor e o parâmetro largura da distribuição.

• Os números X e σ não são conhecidos. Queremos encontrar as melhores estimativas para X e σ baseados nas observações $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

78

Justificação da Média como a Melhor Estimativa

- Como os valores reais de X e σ não são conhecidos, podemos imaginar valores X' e σ' e, partindo desses valores, calcularmos a probabilidade:

$$\mathrm{Prob}_{X',\sigma'}(x_1, x_2, \ldots x_N)$$

- Depois podemos imaginar outro par de valores X'' e σ'' e, se a probabilidade calculada a partir desses valores, $\mathrm{Prob}_{X'',\sigma''}(x_1, x_2, \ldots x_N)$, for maior, esses novos valores serão considerados melhores estimativas para X e σ.

- Este procedimento plausível para encontrar as melhores estimativas de X e σ é conhecido por *Princípio da Máxima Probabilidade* e pode ser enunciado da seguinte forma:

> Dado um conjunto de N resultados de medições de uma grandeza, x_1, x_2,…, x_N, as melhores estimativas para X e σ são os valores que tornam máxima a probabilidade de ocorrência conjunta desses resultados.

$$\mathrm{Prob}_{X,\sigma}(x_1, x_2, \ldots, x_N) \propto \frac{1}{\sigma^N} e^{-\sum (x_i - X)^2 / 2\sigma^2} \qquad (4.19)$$

79

Justificação da Média como a Melhor Estimativa

A equação

$$\mathrm{Prob}_{X,\sigma}(x_1, x_2, \ldots, x_N) \propto \frac{1}{\sigma^N} e^{-\sum (x_i - X)^2 / 2\sigma^2} \qquad (4.19)$$

é máxima se a soma no expoente é mínima. Assim, a melhor estimativa para X é o valor para o qual

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - X)^2 / 2\sigma^2$$

é mínimo. Para tal, diferenciamos em ordem a X e igualamos a zero:

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - X) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} x_i - NX = 0$$

$$(\text{melhor estimativa para } X) = \boxed{\frac{\sum_i x_i}{N}}$$

Provamos assim que a melhor estimativa para o verdadeiro valor, X, é a média dos valores medidos.

80

Justificação da Média como a Melhor Estimativa

• Agora devemos procurar qual é a melhor estimativa para σ, a largura da distribuição limite. Para tal, diferenciamos a eq. 4.19 em ordem a σ e igualamos a zero a derivada. Este procedimento dá o valor de σ que maximiza a probabilidade da eq. 4.19, ou seja, a melhor estimativa para σ é:

$$(\text{melhor estimativa para } \sigma) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - X)^2} \qquad (4.21)$$

• Como o verdadeiro valor X é desconhecido, na prática substituímos X pela melhor estimativa de X, ou seja, pela média $\bar{x}$. A eq. 4.21 vem então:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \qquad (4.22)$$

• Ou seja, a melhor estimativa para a largura σ da distribuição limite é o desvio padrão dos N valores observados $x_1, \ldots, x_N$.

• Uma questão pertinente é termos obtido o factor N na eq. 4.22 e não a definição com o factor (N – 1) que considerámos mais correcta, embora não o tenhamos provado.

81

Justificação da Média como a Melhor Estimativa

• Na verdade, ao passarmos da eq. 4.21 para a eq. 4.22, não reparámos numa subtil mas importante questão. Os números X (valor verdadeiro) e $\bar{x}$ (a nossa melhor estimativa para o verdadeiro valor) não são geralmente iguais e o resultado da eq. 4.22 é sempre menor (ou, quando muito, igual) ao resultado da eq. 4.21. (Se pensarmos em 4.21 como função de X, acabámos de ver que esta função é mínima para X = $\bar{x}$. Assim, 4.22 é sempre menor ou igual a 4.21)

• Portanto, ao passarmos da eq. 4.21 para 4.22, subestimámos a largura σ. Este facto é corrigido, como se pode demonstrar, substituindo o factor N por (N – 1). Então a melhor estimativa para σ é:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}} \qquad (4.23)$$

• Podemos ainda formular duas questões:
1 – Qual é a incerteza de tomarmos $\bar{x}$ como a melhor estimativa do verdadeiro valor X? (Veremos esta questão mais tarde, ainda neste capítulo.)
2 – Qual é a incerteza de tomarmos σ_x como a melhor estimativa da verdadeira largura, σ?

82

Justificação da Média como a Melhor Estimativa

• Também não provaremos este resultado mas demonstra-se que a incerteza relativa em σ_x é dada por:

$$\left(\text{Incerteza relativa em } \sigma_x\right) = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}} \qquad (4.24)$$

• Este resultado põe em relevo o facto de serem necessárias numerosas medidas antes da incerteza ser conhecida com confiança. Por exemplo, se houver apenas 3 medidas de uma certa grandeza física, o resultado 4.24 implica que o desvio padrão é 50% incerto!

• Os resultados das últimas secções deste capítulo dependem de termos admitido que as nossas medidas seguem uma distribuição normal (e sem erros sistemáticos!). Contudo, mesmo quando a distribuição de medidas não segue uma distribuição Gaussiana, podemos considerar quase sempre que a distribuição é aproximadamente Gaussiana e usamos as ideias deste capítulo pelo menos como boas aproximações.

83

Justificação da adição dos quadrados das incertezas

• O problema da propagação de erros aparece quando medimos várias quantidades x, y, …., z, todas com incertezas associadas, e queremos determinar uma grandeza q (x, y, …, z).

• Se as quantidades x, y, …., z, estiverem sujeitas apenas a incertezas aleatórias, terão uma distribuição Normal ou Gaussiana com larguras σ_x, σ_y, …, σ_z. Quando fizermos uma única medida de qualquer uma destas quantidades (x, por exemplo) diremos que a incerteza que lhe está associada é, precisamente, σ_x.

• A pergunta então é: conhecendo as distribuições associadas às medições de x, y, …., z, o que podemos saber sobre a distribuição dos valores de q? Em particular, qual será a largura da distribuição dos valores de q?

A resposta a esta questão será apresentada em 3 passos.

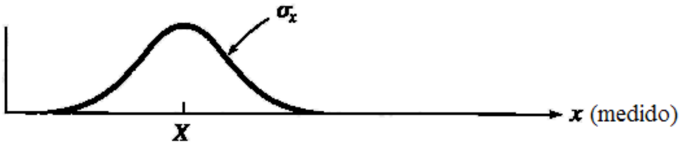
84

1. Quantidade medida + Constante

- Comecemos por considerar que medimos a quantidade x e calculamos a grandeza

  q = x + A

  onde A é uma constante e x é uma grandeza cuja distribuição é Normal, de largura σ_x.



- A probabilidade de obter qualquer valor x dentro de um pequeno intervalo dx é $G_{X,\sigma_x}(x)dx$, ou seja, simplificando, é:

$$\text{Prob}(x) \propto e^{-(x-X)^2/2\sigma_x^2}$$

- A probabilidade de obter o valor q $\propto$ probabilidade de obter o valor x (x = q – A)

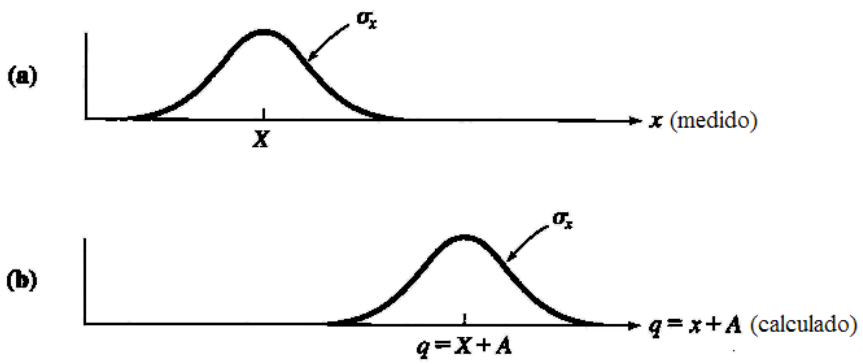
85

1. Quantidade medida + Constante (cont.)

probabilidade de obter o valor q $\propto e^{-[(q-A)-X]^2/2\sigma_x^2}$

$$= e^{-[q-(X+A)]^2/2\sigma_x^2} \qquad (4.25)$$

- Este resultado mostra que os valores calculados de q estão distribuídos segundo uma Gaussiana centrada no valor X+A, com largura σ_x, como se mostra na figura (b). Em particular, a incerteza em q é a mesma (σ_x) de x, tal como previsto nas regras apresentadas no capítulo II (slide 32 e 38).



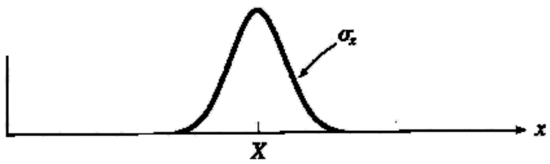
86

2. Quantidade medida x Constante

• Consideremos agora a quantidade x medida e o cálculo da grandeza

q = Bx

onde B é constante.



Raciocinando como anteriormente: x = q/B,

(probabilidade de obter o valor q) $\propto$ (probabilidade de obter o valor x = q/B)

$$\text{probabilidade de obter o valor q} \propto \exp\left[-\left(\frac{q}{B}-X\right)^2 \Big/ 2\sigma_x^2\right]$$

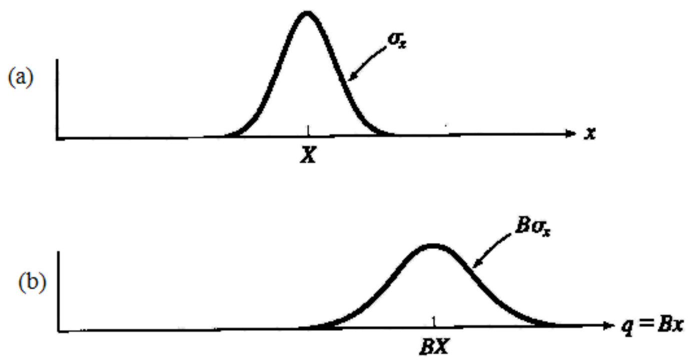
$$= \exp\left[-(q-BX)^2 / 2B^2\sigma_x^2\right] \qquad (4.26)$$

87

2. Quantidade medida x Constante (cont.)

$$\text{(probabilidade de obter o valor q)} \propto \exp\left[-(q-BX)^2 / 2B^2\sigma_x^2\right] \qquad (4.26)$$

Ou seja, os valores de q = B/x estão distribuídos segundo uma Gaussiana com centro em BX e largura $B\sigma_x$ (figura (b)). Em particular, a incerteza de q = Bx é igual a $B\sigma_x$, tal como a regra do Capítulo II havia indicado (slide 41)

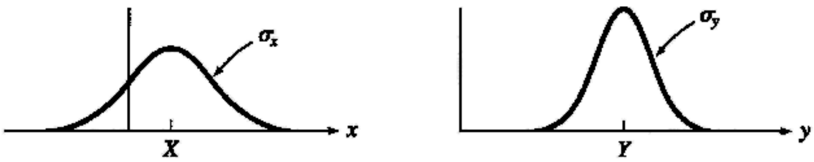


88

3. Soma de duas quantidades medidas

- Consideremos agora que medimos duas quantidades independentes x e y e que calculamos a sua soma **x + y**.

- As medidas de x e y traduzem distribuições Normais em torno dos seus valores verdadeiros X e Y, com larguras σ_x e σ_y, respectivamente.



(a) (b)

- Para simplificar, vamos começar por considerar que os verdadeiros valores de x e y são ambos zero. Então:

$$\text{Prob}\,(x) \propto \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

$$\text{Prob}\,(y) \propto \exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}\right)$$

89

3. Soma de duas quantidades medidas (cont.)

- O nosso problema é calcular a probabilidade de obter qualquer valor particular (x + y). Como x e y são grandezas medidas independentemente, **a probabilidade de obter qualquer valor x <u>e</u> qualquer valor y** é o produto das probabilidades anteriores:

$$\text{Prob}(x,y) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right] \qquad (4.27)$$

- Notemos que é verdadeira a relação:

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=\frac{(x+y)^2}{A+B}+\frac{(Bx-Ay)^2}{AB(A+B)}=\frac{(x+y)^2}{A+B}+z^2$$

$$\text{Prob}(x,y) \propto \exp\left[-\frac{(x+y)^2}{2\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}-\frac{z^2}{2}\right] \qquad (4.28)$$

90

3. Soma de duas quantidades medidas (cont.)

• A probabilidade de obter determinados valores x e y, também pode ser vista como a probabilidade de obter os valores x+y e z. Podemos assim escrever:

$$\mathrm{Prob}(x+y,z) \propto \exp\left[-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}\right]\exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \qquad (4.29)$$

• Estamos interessados na probabilidade de obter o valor (x+y) independentemente do valor de z. Essa probabilidade é obtida somando (integrando) para todos os valores possíveis de z, ou seja,

$$\mathrm{Prob}(x+y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Prob}(x+y,z)dz$$

• O factor $\exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]$, integrado entre ± infinito dá $\sqrt{2\pi}$. Assim

$$\mathrm{Prob}(x+y) \propto \exp\left[-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}\right] \qquad (4.30)$$

91

3. Soma de duas quantidades medidas (cont.)

$$\mathrm{Prob}(x+y) \propto \exp\left[-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}\right] \qquad (4.30)$$

• Este resultado mostra que os valores (x + y) seguem uma distribuição Gaussiana com largura:

$$\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$$

• Se X e Y não forem nulos? Podemos sempre escrever:

$$x+y=(x-X)+(y-Y)+(X+Y)$$

• Pelo resultado obtido no ponto 1, os dois primeiros termos estão centrados em zero, com larguras σ_x e σ_y. [(q = x – X; x = q + X → o expoente da exponencial fica $(q+X-X)^2 = q^2$, ou seja, distribuição centrada em zero.]

• Assim, pela probabilidade encontrada (eq. 4.30), a soma dos dois primeiros termos segue uma distribuição Gaussiana de largura

$$\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$$

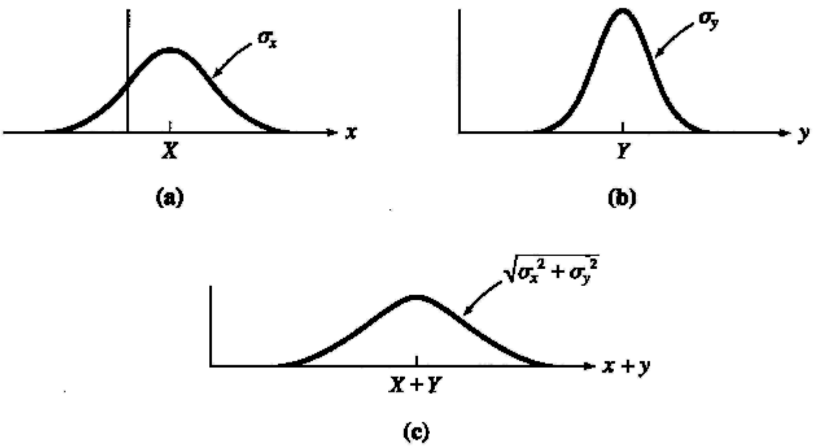
• O 3º termo é uma constante. Portanto, também pelo resultado do ponto 1, esse termo apenas desloca o centro da distribuição para (X + Y), mas não altera a sua largura. 92

3. Soma de duas quantidades medidas (cont.)

Os valores (x + y) seguem uma distribuição Normal centrada em (X + Y) com Largura (incerteza)

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

como pretendíamos mostrar.



93

Justificação da fórmula geral de propagação de erros

- Suponhamos que medimos duas quantidades independentes x e y, cujos valores observados seguem uma distribuição Normal, e que queremos calcular q(x,y).

- As larguras σ_x e σ_y (incertezas em x e y) devem, como sempre, ser pequenas. Isto significa que apenas lidamos com valores de x e de y perto de X e de Y, respectivamente. Podemos então escrever:

$$q(x,y) \approx q(X,Y) + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)(x - X) + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)(y - Y)$$

Esta aproximação é boa porque os únicos valores de x e y que obtemos com frequência significativa estão perto de X e Y. As duas derivadas parciais são avaliadas nos pontos X e Y e são, portanto, números fixos.

94

Justificação da fórmula geral de propagação de erros (cont.)

$$q(x,y) \approx q(X,Y) + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)(x-X) + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)(y-Y)$$

q(x,y) é então a soma de 3 termos:

- um nº fixo, q(X,Y), que apenas desloca o centro da distribuição dos valores calculados;

- um nº fixo, $\partial q/\partial x$, multiplicado por (x-X) cuja distribuição tem largura σ_x; portanto, os valores do 2º termo seguem uma distribuição centrada em zero (pela mesma razão do ponto anterior) e com largura $\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\sigma_x$

- um nº fixo, $\partial q/\partial y$ multiplicado por (y-Y) cuja distribuição tem largura σ_y; portanto, os valores do 3º termo seguem uma distribuição centrada em zero e com largura $\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\sigma_y$

95

Justificação da fórmula geral de propagação de erros (cont.)

- Combinando os 3 termos e invocando as conclusões dos passos 1 a 3 do ponto anterior concluímos que q(x,y) segue uma distribuição Normal à volta do verdadeiro valor, q(X,Y), com largura (incerteza):

$$\sigma_q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\sigma_y\right)^2}$$

- Se identificarmos as incertezas dx e dy como σ_x e σ_y obtemos precisamente a fórmula apresentada no capítulo II (slide 45).

- Se q(x, y, …, z)

$$\sigma_q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\sigma_z\right)^2}$$

96

Desvio Padrão da Média

- Vamos agora provar o resultado do capítulo III: $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$
- Suponhamos que as medidas de x sigam uma distribuição Normal em volta do verdadeiro valor X, com largura σ_x. Queremos agora investigar o grau de confiança da própria média dos N resultados obtidos nas medições.
- Para tal vamos imaginar que repetimos muitas vezes um conjunto de N medidas de x e que em cada uma delas determinamos a média. Qual é a distribuição dessa repetição de conjuntos de N medidas?
- Em cada conjunto, fazemos N medidas e determinamos:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_N}{N}$$

- Como o valor médio calculado $\bar{x}$ é uma função simples das quantidades medidas $x_1, \ldots, x_N$, podemos determinar a distribuição de $\bar{x}$ através da propagação de erros. O único facto estranho é que todas as medidas $x_1, \ldots, x_N$, são medidas da mesma grandeza x e, portanto, têm o mesmo valor verdadeiro X e a mesma largura (incerteza) σ_x.

97

Desvio Padrão da Média (cont.)

- Notemos que, se $x_1, \ldots x_N$, seguem uma distribuição Normal, $\bar{x}$ dado pela fórmula da média também segue a mesma distribuição e o seu verdadeiro é dado por:

$$\frac{X + \ldots + X}{N} = X$$

- Então, depois de fazermos muitas determinações da média $\bar{x}$ de conjuntos de N medidas, os nossos muitos resultados de $\bar{x}$ estarão distribuídos em torno de X.

- Resta encontrar a largura da distribuição dos valores $\bar{x}$. De acordo com a fórmula de propagação do erro, essa largura é:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_1}\sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_2}\sigma_{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_N}\sigma_{x_N}\right)^2}$$

98

Desvio Padrão da Média (cont.)

- Como $x_1, \ldots x_N$ são tudo medidas da mesma quantidade x, as suas larguras (incertezas) são todas iguais a σ_x:

$$\sigma_{x_1} = \ldots = \sigma_{x_N} = \sigma_x$$

- As derivadas parciais também são iguais:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_N} = \frac{1}{N}$$

- De onde:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{1}{N}\sigma_x\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{N}\sigma_x\right)^2} = \sqrt{N\frac{\sigma_x^2}{N^2}}$$

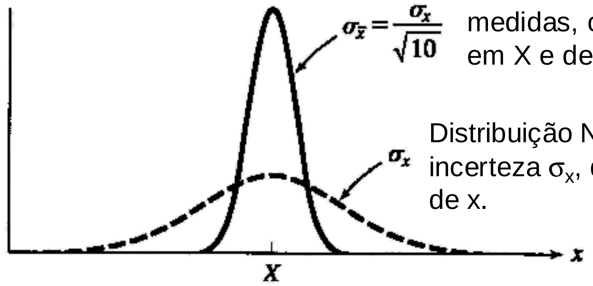
$$\boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}}$$ (c.q.d.)

99

Desvio Padrão da Média (cont.)

- Mostrámos que, depois de repetirmos muitas vezes um conjunto de N medidas e de calcularmos a média de cada conjunto, os nossos resultados para $\bar{x}$ seguem uma distribuição Normal, estão centrados no verdadeiro valor X e a largura dessa distribuição é $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$.

- Esta largura $\sigma_{\bar{x}}$ corresponde a um intervalo de confiança de 68% da nossa experiência. Traduz, portanto, a incerteza na média ou desvio padrão da média.



Se fizermos muitas determinações da média de 10 medidas, obtemos uma Distribuição Normal centrada em X e de largura $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$

Distribuição Normal (centrada em X e de incerteza σ_x, das medidas individuais de x.

100

Grau de confiança num valor medido

- Retomemos duas questões iniciais:

1) O que significa "estarmos razoavelmente seguros de que um dado valor medido se situa no intervalo $x_{best} \pm \delta x$?

2) Quando comparamos x_{best} com $x_{esperado}$ (expectativa teórica ou baseada noutro resultado experimental), como decidimos se o acordo ou discrepância entre os dois valores é aceitável?

- Quanto à 1ª questão: se medirmos a quantidade x várias vezes a média $\bar{x}$ dos nossos valores é a melhor estimativa de x, e o desvio padrão da média, $\sigma_{\bar{x}}$, é uma boa medida da sua incerteza:

$$x_{best} \pm \delta x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$$

Isto significa que qualquer medida de x que façamos, tem 68% de probabilidade de pertencer ao intervalo $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$. Esta é a escolha mais comum mas podemos fazer outras como, por ex., $\bar{x} \pm 2\sigma_{\bar{x}}$. Neste caso, qualquer medida que façamos tem 95% de probabilidade de pertencer ao novo intervalo.

101

Grau de confiança num valor medido

- Quanto à 2ª questão, suponhamos que um estudante mede uma certa quantidade x (por ex., a diferença entre dois momentos que era suposto dar zero) na forma:

$$(\text{valor de x}) = x_{best} \pm \sigma_x$$

e quer compará-la com um valor $x_{esperado}$.

Podemos argumentar que se a discrepância $|x_{best} - x_{esperado}|$ for menor (ou apenas ligeiramente maior) do que σ, então o acordo é razoável. O critério é aceitável mas não nos dá uma medida quantitativa sobre quão bom ou mau é o acordo. Na verdade não há limites definidos para a fronteira da "aceitabilidade" de um valor. Por ex., uma discrepância de 1.5σ seria ainda aceitável?

- Para ponderar estes aspectos vamos admitir que a medida realizada pelo estudante segue uma distribuição normal, com as seguintes características: 1) está centrada no valor esperado x_{esp} e 2) a largura da distribuição é igual à estimada pelo estudante, σ_x.
- A hipótese 1) é aquilo que o estudante espera. Ele reduziu os erros sistemáticos a um nível desprezável de modo a que a distribuição estivesse centrada no valor verdadeiro e confia que esse valor é x_{esp}.

102

Grau de confiança num valor medido

- A hipótese 2 é uma aproximação porque σ_x deve ser uma estimativa do desvio padrão mas só é uma boa estimativa se o nº de medidas nos quais σ_x se baseia for grande.

- Começamos então por determinar a discrepância $|x_{best} - x_{esp}|$ e depois o parâmetro t:

$$t = \frac{|x_{best} - x_{esp}|}{\sigma_x}$$

correspondente ao nº de desvios padrão pelo qual x_{best} difere de x_{esp}. A partir da tabela do Integral do Erro Normal, podemos achar a probabilidade (dadas as nossas hipóteses) de obter uma resposta que difere do x_{esp} por t ou mais desvios padrão. Esta probabilidade é:

$$\text{Prob (fora de } t\sigma_x) = 1 - \text{Prob (dentro de } t\sigma_x)$$

- Se esta probabilidade for grande, a discrepância $|x_{best} - x_{esp}|$ é perfeitamente razoável e o resultado x_{best} é aceitável. Se a probabilidade for pequena, a discrepância deve ser considerada significativa e é necessário ponderar o que se terá passado na experiência.

103

Grau de confiança num valor medido

- Por exemplo: $|x_{best} - x_{esp}| = \sigma$

$$\text{Prob (fora de } t\sigma) = 1 - \text{Prob (dentro de } t\sigma)$$

32 % 68%

O que significa que a probabilidade de uma discrepância desta ordem é 32%.
É bastante provável que tal aconteça e, portanto, considera-se que a discrepância é insignificante.

- Agora $|x_{best} - x_{esp}| = 3\sigma$

$$\text{Prob (fora de } t\sigma) = 1 - \text{Prob (dentro de } t\sigma)$$

0.3 % 99.7%

A probabilidade de uma discrepância de 3σ é muito pequena e, se as nossas hipóteses estão correctas, a discrepância de 3σ é bastante improvável. Ou, dito de outro modo, se A discrepância do estudante for 3σ, as nossas hipóteses estão provavelmente Incorrectas.

104

Grau de confiança num valor medido

- A fronteira entre "aceitabilidade" ou não-aceitabilidade depende do nível abaixo do qual julgamos a discrepância como "irrazoavelmente improvável". Esse nível é uma questão a ser decidida pelo experimentador. Alguns consideram que 5% é um bom valor para a "improbabilidade irrazoável". Se aceitarmos esta escolha, uma discrepância de 2σ é inaceitável porque

$$\text{Prob (fora de } 2\sigma) = 4.6\ \%.$$

Podemos ver na Tabela que qualquer discrepância maior do que 1.96σ é inaceitável para esta escolha de 5%. Estas discrepâncias designam-se muitas vezes por *significativas*.

De modo análogo, para um nível de 1%, vemos que qualquer discrepância maior do que 2.58σ seria inaceitável. Estas discrepâncias designam-se muitas vezes por *altamente significativas*.

Um procedimento seguido por muitos físicos é: se uma discrepância é menor que 2σ, o resultado é julgado aceitável; se a discrepância é maior do que 2.5σ, o resultado é inaceitável. Se fica entre 1.9σ e 2.6σ, o resultado é inconclusivo. Se a experiência é importante, o melhor é repeti-la.

105