Capítulo III – Análise estatística de incertezas aleatórias

- Média
- Desvio Padrão
- Desvio Padrão da Média

46

A Média

- Uma das melhores maneiras de termos confiança num dado resultado é repetirmos várias vezes a medida e examinarmos os diferentes valores obtidos, recorrendo a métodos estatísticos.

- Não podemos aplicar a análise estatística a incertezas experimentais de tipo sistemático. Apenas às incertezas aleatórias.

Exemplo: Numa dada experiência, tendo reduzido a um nível desprezável os erros sistemáticos, medimos uma quantidade x várias vezes e obtemos os seguintes resultados (em unidades arbitrárias):

71, 72, 72, 73, 71

Qual o melhor valor de x que devemos considerar?

A MÉDIA: $$\bar{x} = \frac{71+72+72+73+71}{5} = 71.8$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}}$$

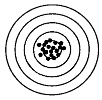
47

Desvio Padrão

- Como estimar agora uma **incerteza média** para os valores obtidos?
- Sendo $\overline{x}$ o melhor valor de x, uma quantidade que dá informação sobre a dispersão dos dados obtidos é a diferença entre cada medida e $\overline{x}$

$$x_i - \overline{x} = d_i$$

d_i - Desvio ou Resíduo – informa sobre quanto a medida x_i se afasta da média.

- Se os desvios são pequenos as medidas são precisas. 

Nº Tentativa	Valor da Medida - x_i	Resíduo: $d_i = x_i - \overline{x}$
1	71	-0.8
2	72	0.2
3	72	0.2
4	73	1.2
5	71	-0.8
$\sum x_i = 359$	$\overline{x} = 71.8$	$\sum d_i = 0.0$

Vê-se que a média dos desvios, $\overline{d} = \frac{\sum d_i}{N}$, não é uma quantidade útil para caracterizar a incerteza na média

48

- Vamos então usar o quadrado dos desvios e só depois determinar a sua média:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$$

σ_x – **Desvio Padrão** da população $x_1, \ldots x_N$

Nº Tentativa	Valor da Medida - x_i	Resíduo: $d_i = x_i - \overline{x}$	d_i^2
1	71	-0.8	0.64
2	72	0.2	0.04
3	72	0.2	0.04
4	73	1.2	1.44
5	71	-0.8	0.64
$\sum x_i = 359$	$\overline{x} = 71.8$	$\sum d_i = 0.0$	$\sum d_i^2 = 2.80$

A incerteza média nas 5 medidas é dada por $\sigma_x = 0.7$

- σ_x^2 – **Variância** das medidas $x_1, \ldots x_N$

49

• Há argumentos teóricos para substituirmos N → N-1 na fórmula do Desvio Padrão.

$$\boxed{\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}}$$

σ_x – **Desvio Padrão** da amostra $x_1, \ldots x_N$

• A divisão por N-1 corrige a tendência da 1ª equação para subestimar a incerteza no caso do nº de medidas ser pequeno. Esta tendência pode ser entendida se tomarmos o valor extremo N = 1. Quando só há uma medida, a média é igual ao próprio valor e a incerteza é nula, o que está, evidentemente, incorrecto.

• Com a nova expressão, viria para σ_x o valor indeterminado 0/0, o que reflecte a nossa total ignorância sobre a incerteza quando realizamos apenas uma medida.

• A diferença entre as duas fórmulas para σ_x é pequena e tanto mais pequena quanto maior for o número de medidas N.

(Atenção às máquinas de calcular – qual a definição do desvio padrão que usam)

50

Desvio Padrão da Média

• O Desvio Padrão apresentado é uma incerteza média que caracteriza cada uma das medidas individuais realizadas.

• Contudo, temos razões para pensar que a média constitui um valor mais confiável do que qualquer uma das medidas tomadas separadamente.

• Mas qual é a incerteza associada ao valor médio?

• Provaremos que é dada por:

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}}$$ - **Desvio Padrão da Média**

No exemplo anterior das 5 medidas, $x_{best} \pm \delta x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} = 71.8 \pm 0.3$

51

Algumas considerações a propósito de $\boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}}$

- σ_x representa a incerteza média nas medidas individuais. Se fizermos mais medidas, este valor não vai variar apreciavelmente.

- Contudo, o desvio padrão na média vai diminuir lentamente, à medida que o número de medidas N aumenta. De facto, é o que esperamos. Se fazemos mais medidas de uma dada grandeza, esperamos naturalmente que o resultado final seja mais confiável e esse aumento de confiança no resultado é garantido pelo denominador $\sqrt{N}$.

- O factor $\sqrt{N}$ cresce de modo demasiado lento à medida que N aumenta. Por exemplo, se quisermos aumentar a precisão das nossas medidas por um factor 10, teríamos que aumentar N por um factor 100!

- Além disso, lembremos que eventuais erros sistemáticos não diminuem com o aumento do número de medidas.

- Portanto, na prática, se queremos aumentar apreciavelmente a precisão das nossas medidas, a melhor maneira pode ser melhorar a técnica e o sistema experimental.

52