Capítulo II – Propagação de erros (cont.)

- Propagação de incertezas independentes e arbitrárias
- Funções de uma variável
- Determinação da propagação de incertezas por etapas – vantagens e inconvenientes
- Erros de compensação
- Fórmula geral para a propagação de erros

36

Incertezas independentes e aleatórias

Vimos que:

- quando as quantidades se adicionam ou subtraem, as incertezas adicionam-se

$$q = a + b - c ... - z \qquad \delta q \approx \delta a + \delta b + \delta c + ... + \delta z$$

- Quando as quantidades se multiplicam ou dividem, as incertezas relativas adicionam-se

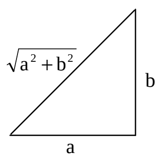
$$q = \frac{a \times b \times ... \times r}{s \times t \times ... \times u} \qquad \frac{\delta q}{|q|} \approx \frac{\delta a}{|a|} + \frac{\delta b}{|b|} + ... + \frac{\delta r}{|r|} + \frac{\delta s}{|s|} + \frac{\delta t}{|t|} + ... + \frac{\delta u}{|u|}$$

Demonstraremos mais tarde que, se as **incertezas** são **independentes e aleatórias**, uma estimativa mais realista considera que as incertezas totais são mais pequenas do que as obtidas por soma simples e estão relacionados com a soma dos seus quadrados. Por exemplo, dados $x_{best} \pm \delta x$ e $y_{best} \pm \delta y$, a incerteza δf em f será:

$$\delta f = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}$$

$$\delta f = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2}$$

É claro que $\sqrt{a^2 + b^2} < a + b$



37

Generalizando, dados

$$q = a + b - c ... - z$$

ou

$$q = \frac{a \times b \times ... \times r}{s \times t \times ... \times u}$$

$$\boxed{\delta q = \sqrt{(\delta a)^2 + (\delta b)^2 + (\delta c)^2 + ... + (\delta z)^2}}$$

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = \sqrt{\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta b}{b}\right)^2 + ... + \left(\frac{\delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\delta t}{t}\right)^2 + ... + \left(\frac{\delta u}{u}\right)^2}}$$

A soma simples das incertezas absolutas ou das incertezas relativas corresponderá sempre a uma majoração da incerteza total.

$$\boxed{\delta q \leq \delta a + \delta b + \delta c + ... + \delta z}$$

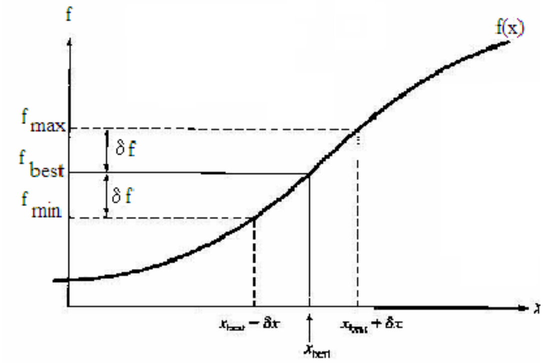
$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} \leq \frac{\delta a}{|a|} + \frac{\delta b}{|b|} + ... + \frac{\delta r}{|r|} + \frac{\delta s}{|s|} + \frac{\delta t}{|t|} + ... + \frac{\delta u}{|u|}}$$

38

Funções arbitrárias de uma variável

Muitos cálculos requerem funções envolvendo operações mais complexas do que Simples adições ou multiplicações: senos, tangentes, raízes, etc.

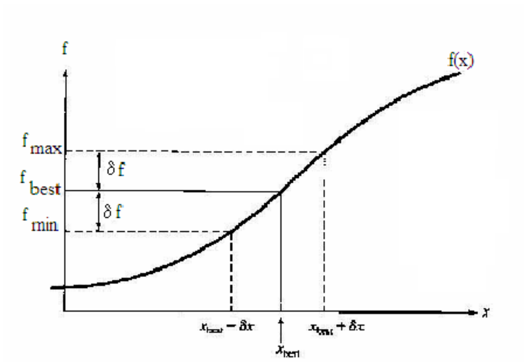
Suponhamos que temos uma quantidade medida $x_{best} \pm \delta x$ e que vamos calcular uma função f(x) a partir dela. Uma maneira directa de estimar δf é construir o gráfico de f(x) e marcar os ponto x_{best}, $x_{best} - \delta x$ e $x_{best} + \delta x$.



- A x_{best} corresponderá f_{best}.
- A $x_{best} - \delta x$ corresponderá f_{min}
- A $x_{best} + \delta x$ corresponderá f_{max}
- A distancia entre f_{min} e f_{max} é $2\delta f$
- Obtém-se $f_{best} \pm \delta f$

Contudo, quando a função f(x) é conhecida explicitamente, podemos recorrer ao cálculo Infinitesimal para determinar δx.

39



Vê-se na figura que $\delta f = f(x_{best}+\delta x)-f(x_{best})$

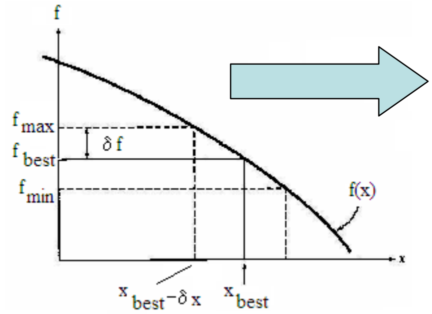
Sabemos, do Cálculo Infinitesimal que, para qualquer função f(x) e qualquer incremento suficientemente pequeno u:

$$f(x+u)-f(x)=\frac{df}{dx}u$$

Então, desde que a incerteza δx seja pequena (e assumimos que é), a comparação das duas expressões dá

$$\delta f = \frac{df}{dx}\delta x$$

A incerteza em f é dada pela derivada de f em ordem a x, multiplicada pela incerteza em x. A derivada traduz o declive da curva f(x) no ponto considerado (x_{best}, f_{best})



Agora, o declive é negativo: $\delta f = -\frac{df}{dx}\delta x$

Generalizando: a incerteza numa qualquer função de uma variável é dada por:

$$\boxed{\delta f = \left|\frac{df}{dx}\right|\delta x}$$

40

Dois casos particulares: incerteza na potência e no produto por uma constante

Consideremos $f(x)=x^n$ qualquer que seja n.

$$\delta f = \left|\frac{df}{dx}\right|\delta x = \left|nx^{n-1}\right|\delta x$$

Se dividirmos por $|f|=|x^n|$

Obtemos: $\boxed{\frac{\delta f}{|f|}=|n|\frac{\delta x}{|x|}}$ Incerteza na potência, qualquer que seja n.

Consideremos $f(x)=Bx$ qualquer que seja B.

$\boxed{\delta f = \left|\frac{df}{dx}\right|\delta x = |B|\delta x}$ Incerteza no produto por uma constante B, qualquer que seja B.

41

Determinação da propagação de incertezas por etapas – vantagens e inconvenientes

Qualquer determinação de uma incerteza total pode ser calculada através de uma sequência de etapas, cada uma envolvendo a determinação da incerteza associada a cada determinado tipo de operação matemática.

Por exemplo: temos x, y, z, u, δx, δy, δz e δu
Queremos conhecer f = x (y – z sen u) e δf

1) δu → δ(sen u)
2) δz e δ(sen u) → δ(z sen u)
3) δy e δ(z sen u) → δ(y – z sen u)
4) δx e δ(y – z sen u) → δ[x(y – z sen u)] = δf

Notas – a) Como o cálculo de incertezas em somas e subtracções envolve a incerteza nas quantidades (δx), enquanto o cálculo de incertezas em produtos ou divisões envolve incertezas relativas (δx/|x|), é necessário passar facilmente de incertezas absolutas a fraccionárias e vice-versa.

b) Pode acontecer que, para certas funções, este método por etapas não seja o mais adequado, como veremos a seguir.

42

Erros de compensação

Suponhamos a medida directa das variáveis x, y e z e a determinação da grandeza f:

$$f = \frac{x+y}{x+z}$$

na qual uma variável aparece mais do que uma vez. Se calcularmos δf por etapas, determinamos as incertezas de x+y e x+z separadamente, e só depois a incerteza no quociente. Deste modo, não precavemos a possibilidade de erros em x no numerador poderem ser cancelados por erros em x no denominador. Este efeito é por vezes designado por *erros de compensação*.

Se, por exemplo, δx estiver sobrestimado, o resultado final da determinação da Incerteza por passos amplificará essa sobrestimativa do erro.

A solução é determinar a incerteza total de uma única vez, recorrendo a uma fórmula geral de propagação de erros.

43

Fórmula geral para a propagação de erros

Suponhamos que f(x, y). Se x_{best} e y_{best} são as melhores estimativas para x e y, esperamos que a melhor estimativa para f, f_{best}, seja: $f_{best} = f(x_{best}, y_{best})$.

Se x e y sofrerem pequenos incrementos u e v, respectivamente:

$$f(x+u, y+v) \approx f(x,y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y u + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x v \qquad (*)$$

Onde $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$ são as derivadas parciais de f em ordem a x e y, mantendo y e x constantes, respectivamente.

Os valores extremos mais prováveis de x e y são

$$x_{best} \pm \delta x \qquad y_{best} \pm \delta y$$

Usando estes valores em (*) obtemos os valores extremos de f:

$$f(x_{best}, y_{best}) \pm \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\delta y\right) \qquad (**)$$

44

Comparando (**) com $f_{best} \pm \delta f$, obtém-se:

$$\delta f \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\delta y$$

Quando as incertezas nas grandezas medidas directamente são independentes e aleatórias, podemos adequar a incerteza total à fórmula quadrática:

$$\delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\delta z\right)^2} \quad \text{para as grandezas } x, y, \ldots, z$$

ou, numa forma mais condensada,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2} \quad \text{designando as mesmas grandezas por } x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Portanto, $\delta f \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\delta x + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\delta z$, sejam δx, … δz, independentes ou não.

É aconselhável usar-se a fórmula geral quando uma variável existe mais do que uma vez na função f (x,….,z). Podem existir erros de compensação e, neste caso, a estimativa por passos pode conduzir a uma avaliação incorrecta da incerteza total.

45