Capítulo I – Noções básicas sobre incertezas em medidas (cont.)

- Discrepância entre duas medidas da mesma grandeza
- Incerteza em medidas directas: leituras escalares e digitais
- Representação gráfica

Capítulo II – Propagação de erros

- Comparação entre dois valores medidos
- Regra provisória da incerteza na diferença
- Incerteza no produto de dois valores medidos
- Regra provisória da incerteza no produto

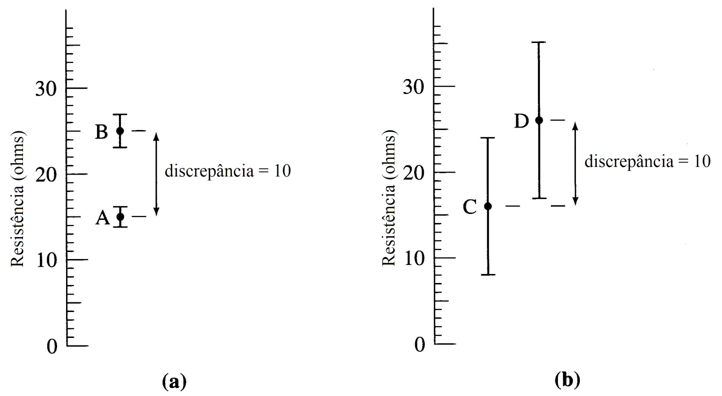
17

Discrepância

•Duas medidas da mesma resistência.

•Melhor valor, x_{best}, é representado pelo ponto.

•Intervalo de valores prováveis é representado pelas **barras de erro verticais**.
A: R = 15 ± 1 Ω (ε ≈ 7%)
B: R = 25 ± 2 Ω (ε ≈ 8%)

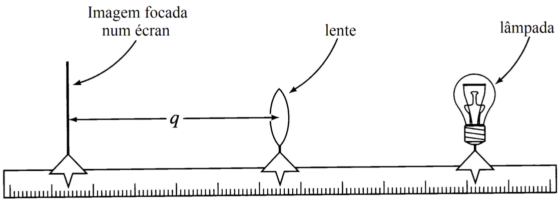


- **Discrepância = diferença entre os 2 melhores valores** = 10 Ω
- Discrepância **significativa** > combinação incertezas das duas medidas – caso a). Pelo menos uma das medidas está incorrecta.
- Discrepância **não-significativa** quando as margens de erro se sobrepõem – caso b). Não há razão para duvidarmos dos resultados, embora sejam bastante mais imprecisos do que no caso a)

18

Incerteza em medidas directas

- Quase todas as medições directas envolvem a leitura de uma escala (régua, termómetro, voltímetro, osciloscópio, etc.) ou de um mostrador digital (relógio digital, termómetro digital, multímetro, etc.).
- Quando a fonte de incerteza é a leitura de uma escala, é apenas necessário “ser sensato” e tomar como incerteza o menor valor que defina um intervalo de incerteza que “dê confiança” à medida realizada. (1/2 da menor divisão; a menor divisão se ela for muito pequena; ¼ da menor divisão se conseguirmos dividi-la visualmente em 4 partes, etc.)
- Há, contudo, outras fontes de incerteza mais difíceis do que a simples leitura de escalas. É que, por vezes é difícil definir o ponto de leitura. Este tipo de problema é conhecido como ***problema de definição.***



19

Muito importante - Não se pode considerar só as escalas na avaliação dos erros associados a uma medida. Há, frequentemente, outras fontes de incerteza que, se não forem consideradas, vão originar incertezas subestimados das quantidades medidas.

Também não devemos sobrestimar os erros, pois corremos o risco de tornar as medidas inúteis

- Pelo menos aparentemente, é mais fácil utilizar um medidor digital do que um medidor analógico convencional. A menos que esteja defeituoso, aquele deve indicar apenas dígitos significativos.
- Contudo, nem sempre é assim e convém ler o manual com as características técnicas do aparelho. Por exemplo, um voltímetro digital que indique um valor de 82 μV, pode ter associado uma incerteza que vai desde 0.5 μV até 1 μV ou ainda mais.
- Sem manual, uma decisão razoável será aceitar que a incerteza é de ± 1 unidade no último dígito.

20

• Outro cuidado a ter quando realizamos leituras digitais é não deixarmos que a utilização de aparelhos digitais nos dê uma falsa ideia de precisão.

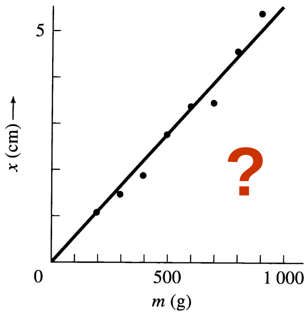
Por exemplo, um cronómetro digital pode fornecer medidas de tempo com grande precisão (por exemplo, até aos décimas de segundo). Contudo, uma medida pode vir afectada de uma grande imprecisão, por exemplo, associada ao nosso reflexo de ligar e desligar o cronómetro.

Sempre que uma medida possa ser repetida, tal deve feito várias vezes.

A dispersão de valores encontrada é geralmente um bom indicador das incertezas associadas e a média dos valores encontrados é certamente mais fiável do que qualquer uma das medidas individuais.

21

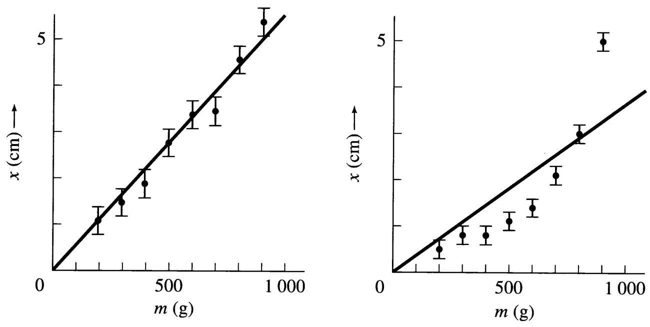
Representação gráfica



(a)

Muitas leis e relações físicas traduzem proporcionalidade entre certas quantidades
$\Longrightarrow$ relações lineares entre elas.

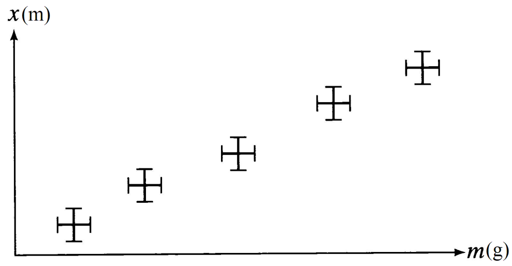
A representação gráfica é, portanto, útil para estabelecer se tal dependência existe entre duas grandezas.



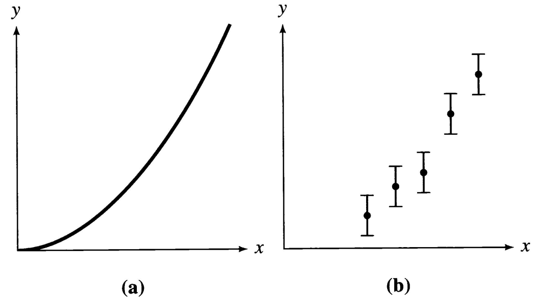
(b) (c)

Desprezando as incertezas na quantidade m medida, o gráfico b) mostra que existe uma relação linear entre as grandezas x e m, enquanto c) mostra claramente que não.

22

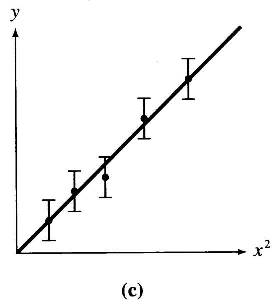


Representação com incertezas em x e em y.



Quando a relação entre y e x é parabólica y $\propto x^2$, é difícil verificar graficamente essa dependência através da representação y(x).

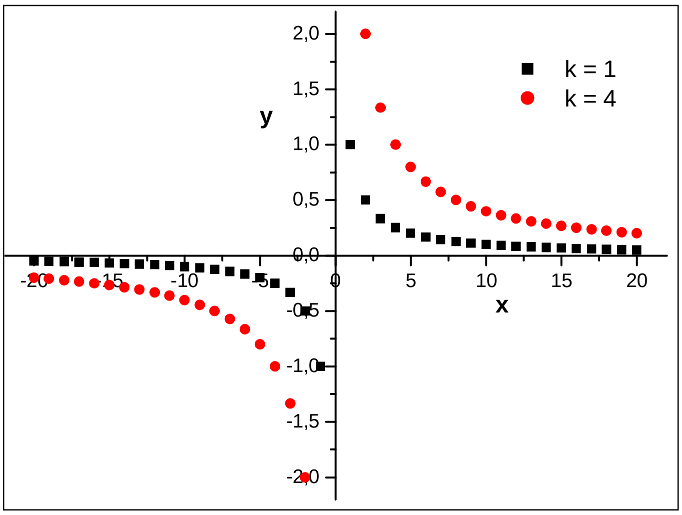
Contudo, é fácil, com o mesmo nº de medidas, verificar a linearidade entre y e x^2 se representarmos y(x^2).



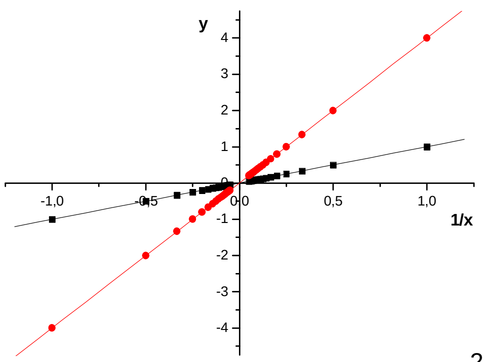
23

Função hiperbólica y(x): y $\propto$ 1/x

$$y = \frac{k}{x}$$



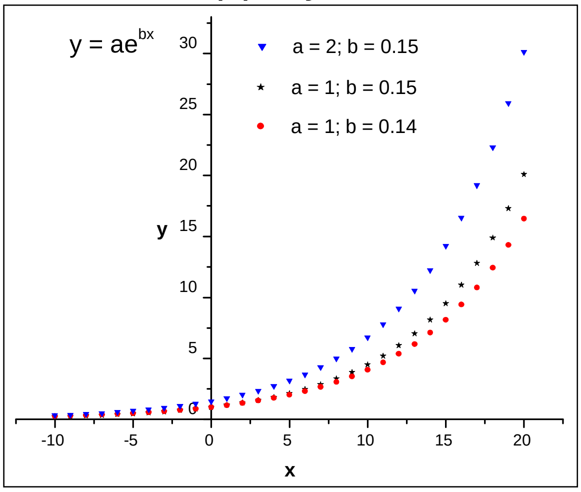
y = f(1/x)



24

Função exponencial y(x): y varia exponencialmente com x; a relação entre x e y é uma curva exponencial

$$f(x) = y = ae^{bx}$$

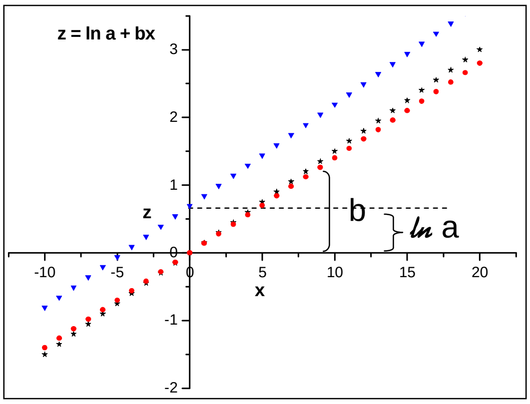


e = 2.71828… (Nº de Euler)

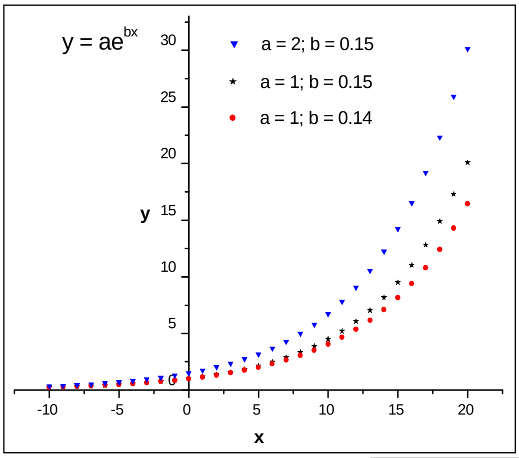
É a base do logaritmo neperiano: *ln*

$$y = ae^{bx}$$

$$\ln y = \ln a + bx$$



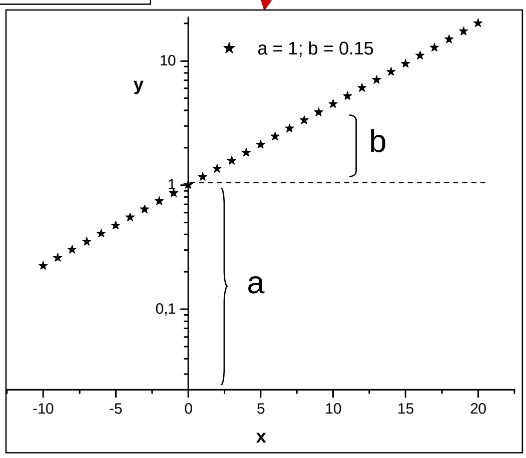
25



Escalas lineares em x e em y

x	y
-1	0,86071
-2	0,74082
-3	0,63763
-4	0,54881
-5	0,47237
-6	0,40657
-7	0,34994
-8	0,30119
-9	0,25924
-10	0,22313
0	1
1	1,16183
2	1,34986
3	1,56831
4	1,82212
5	2,117
6	2,4596
7	2,85765
8	3,32012
9	3,85743
10	4,48169
11	5,20698
12	6,04965
13	7,02869
14	8,16617
15	9,48774
16	11,02318
17	12,8071
18	14,87973
19	17,28778
20	20,08554

Escala logarítmica em y e linear em x



26

Propagação de Incertezas

- A grande maioria das grandezas físicas não podem ser determinadas numa medição directa e só são encontradas numa sequência de dois passos:

1º) medem-se uma ou mais quantidades que podem ser medidas directamente e a partir das quais a grandeza em causa pode ser determinada;

2º) usam-se os valores medidos dessas quantidades para calcular a grandeza de interesse.

27

Propagação de Incertezas

- Quando uma determinação da grandeza envolve dois passos, a **avaliação do erro** também envolve dois passos:

1º) estimam-se as incertezas nas quantidades medidas directamente;

2º) determina-se como é que essas incertezas se "propagam" através dos cálculos para produzir a incerteza na grandeza final.

28

Comparação entre dois valores medidos

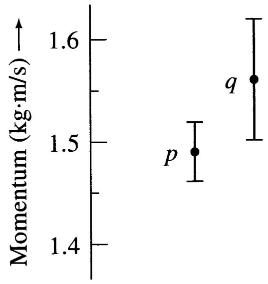
Exemplo: Colisão de dois carros - conservação do momento linear

(Não se trata de provar a lei mas de ver se os resultados são ou não consistentes com ela)

- Um único par de medidas:

  p_i=1.49 ± 0.03 kg.m/s

  p_f=1.56 ± 0.06 kg.m/s



- As margens de erro intersectam-se e, portanto, os dois resultados são consistentes com a conservação do momento linear.
- Se não fosse o caso, os resultados seriam inconsistentes com a conservação do momento linear e teríamos que procurar incorrecções nas medições, nos cálculos ou na apreciação da incerteza (erros sistemáticos, forças externas, etc.)

29

Se repetirmos as medidas várias vezes, qual a melhor maneira de representarmos os resultados?

Tendo em conta que as incertezas, em geral, pouco diferem de uma repetição para outra, podemos criar uma tabela como:

Tabela de resultados. Momento (kg.m/s)

Tentativa número	Momento inicial p (Valor ± 0.03)	Momento final q (Valor ± 0.06)
1	1.49	1.56
2	3.10	3.12
3	2.16	2.05
etc.		

Contudo, esta representação não contém directamente informação sobre a consistência entre resultados e lei. Uma forma mais completa adiciona uma coluna com a diferença entre os dois resultados (p-q) e a respectiva incerteza.

Mas qual a incerteza associada à diferença (p-q)?

Maior valor provável: $(p_{best} + \delta p) - (q_{best} - \delta q) = (p_{best} - q_{best}) + (\delta p + \delta q)$

Menor valor provável: $(p_{best} - \delta p) - (q_{best} + \delta q) = (p_{best} - q_{best}) - (\delta p + \delta q)$

$$(p_{best} - q_{best}) \pm (\delta p + \delta q)$$

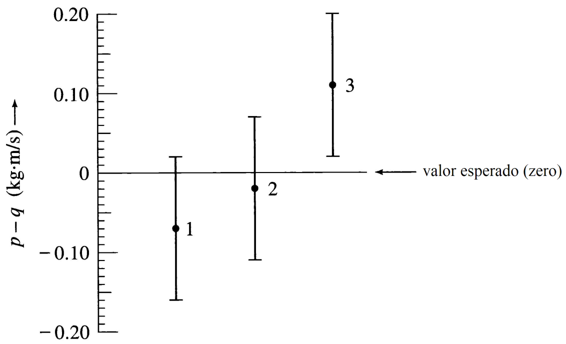
30

Ficamos então com a tabela:

	Momento (kg.m/s)		
Tentativa número	p inicial (valor ± 0.03)	q final (valor ± 0.06)	Diferença p-q (valor ± 0.09)
1	1.49	1.56	−0.07
2	3.10	3.12	−0.02
3	2.16	2.05	0.11
etc.			

•Os nossos resultados são consistentes com a lei da conservação do momento linear se os números da última coluna forem consistentes com zero.

• Podemos verificá-lo de uma forma mais directa através da representação gráfica:



31

Incerteza na Diferença - Regra provisória
Sejam x ± δx e y ± δy. Se z = x – y, então
$$\delta z = \delta x + \delta y$$

•Provisória: porque, como veremos, $\delta z < \delta x + \delta y$ $\left(\delta z = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}\right)$

• Porém:
– fácil de entender;
– muitas vezes a diferença é pequena;
– constitui um limite superior da incerteza.

•Também se poderia ter feito a avaliação da consistência dos resultados através da razão p/q e da respectiva incerteza.

32

Incerteza no produto de dois valores medidos

Exemplo: **determinação do momento linear, p = mv, e da incerteza associada**

- Começamos por representar o melhor resultado da medida da grandeza x ($x_{best} \pm \delta x$) na forma:

$$x_{best}\left(1 \pm \frac{\delta x}{|x_{best}|}\right)$$

- Assim: $m_{best}\left(1 \pm \frac{\delta m}{|m_{best}|}\right)$ e $v_{best}\left(1 \pm \frac{\delta v}{|v_{best}|}\right)$

- O melhor valor para p = mv será $p_{best} = m_{best}v_{best}$

- O **maior** valor provável para p será:

$$m_{best}\left(1+\frac{\delta m}{|m_{best}|}\right)v_{best}\left(1+\frac{\delta v}{|v_{best}|}\right) = m_{best}v_{best}\left(1+\frac{\delta m}{|m_{best}|}\right)\left(1+\frac{\delta v}{|v_{best}|}\right) =$$

$$= m_{best}v_{best}\left(1+\frac{\delta m}{|m_{best}|}+\frac{\delta v}{|v_{best}|}+\frac{\delta m}{|m_{best}|}\frac{\delta v}{|v_{best}|}\right)$$

O produto das incertezas relativas é muito pequeno e podemos desprezá-lo

33

Maior valor para p é, então $\approx m_{best}v_{best}\left(1+\frac{\delta m}{|m_{best}|}+\frac{\delta v}{|v_{best}|}\right)$

- Analogamente:

Menor valor provável será: $m_{best}\left(1-\frac{\delta m}{|m_{best}|}\right)v_{best}\left(1-\frac{\delta v}{|v_{best}|}\right) \approx m_{best}v_{best}\left(1-\frac{\delta m}{|m_{best}|}-\frac{\delta v}{|v_{best}|}\right)$

- Os valores prováveis de p: $m_{best}v_{best}\left(1 \pm \frac{\delta m}{|m_{best}|} \pm \frac{\delta v}{|v_{best}|}\right) = m_{best}v_{best}\left[1 \pm \left(\frac{\delta m}{|m_{best}|}+\frac{\delta v}{|v_{best}|}\right)\right]$

- Comparando com $p_{best}\left(1 \pm \frac{\delta p}{|p_{best}|}\right)$

Vê-se que: $\frac{\delta p}{|p_{best}|} \approx \frac{\delta m}{|m_{best}|}+\frac{\delta v}{|v_{best}|}$

Incerteza no Produto - Regra provisória

Sejam $x \pm \delta x$ e $y \pm \delta y$. Se $z = xy$, então

$$\frac{\delta z}{|z_{best}|} \approx \frac{\delta x}{|x_{best}|}+\frac{\delta y}{|y_{best}|}$$

34

Incerteza no Produto - Regra provisória

Sejam $x \pm \delta x$ e $y \pm \delta y$. Se $z = xy$, então

$$\frac{\delta z}{|z_{best}|} \approx \frac{\delta x}{|x_{best}|} + \frac{\delta y}{|y_{best}|}$$

- Provisória: porque, como veremos, $\frac{\delta z}{|z_{best}|} < \frac{\delta x}{|x_{best}|} + \frac{\delta y}{|y_{best}|}$ $\left(\frac{\delta z}{|z_{best}|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{|x_{best}|}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{|y_{best}|}\right)^2} \right)$

- Esta regra requer que as incertezas relativas em x e y sejam suficientemente pequenas para podermos desprezar o produto. Na prática, se não forem muito menores do que 1 a regra não deve ser aplicada.

- Mesmo que x e y sejam grandezas dimensionalmente diferentes, a regra é válida uma vez que os termos fraccionários envolvidos são adimensionais.